



# RECHERCHES TRANSPORT

BULLETIN D'INFORMATION SCIENTIFIQUE

Volume thématique no. 8 : décembre 1992

## ESTIMATION DE LA CHARGE AUX ESSIEUX D'UNE REMORQUE PAR RÉSEAUX NEURONAUX

Yves Breault

Centre de recherche industrielle du Québec  
333, rue Franquet, C.P. 9038  
Sainte-Foy (Québec), G1C 4C7

MINISTÈRE DES TRANSPORTS  
CENTRE DE DOCUMENTATION  
700, BOUL. RENÉ-LÉVESQUE EST,  
21<sup>e</sup> ÉTAGE  
QUÉBEC (QUÉBEC) - CANADA  
G1R 5H1

### AVANT-PROPOS

La nouvelle réglementation de capacité de chargement de camions étant basée sur la charge aux essieux plutôt que sur la charge totale, le problème d'estimation de la masse aux essieux de remorques, en système embarqué, devient de plus en plus d'actualité. Les techniques étudiées actuellement, pour répondre à ce problème, sont fondées principalement sur la mesure des contraintes que subit l'essieu à l'aide de jauges extensométriques ou même de fibres optiques.

CANQ  
TR  
248  
V. 8

Québec  Canada 

Pour notre part, dans le cadre d'une recherche supportée par les ministères des transports du Québec et du Canada, nous avons opté pour étudier la faisabilité d'une technique originale basée sur la mesure des fréquences de résonance de la structure. Quatre méthodes, fondées sur ce principe, ont été étudiées: l'identification de la masse par régression linéaire d'un système à un seul degré de liberté, la méthode de réponse impulsionnelle, la méthode des réseaux neuronaux et la méthode d'identification statistique. On peut retrouver le détail de ces techniques dans les rapports d'étape BGM-90-420, BGM-91-307, BGM-91-335 et RDM-91-379. De ces méthodes, il s'avère que la méthode d'interpolation par régression linéaire ne peut être utilisée que si la structure a un comportement de corps rigide. Cette hypothèse n'est satisfaite que lorsque le chargement est localisé au même endroit. Des simulations numériques ont montré que la méthode de réponse impulsionnelle permet d'identifier la matrice de masse lorsque la structure est excitée par des forces impulsionnelles de Dirac. L'excitation réelle étant plutôt de forme triangulaire, cette méthode n'a pas fonctionné expérimentalement. **Il y aurait peut être lieu de développer la formulation mathématique pour une excitation triangulaire.**

Suite à ces résultats, la méthode que nous avons retenue, et qui est présentée dans ce rapport, combine la technique des réseaux neuronaux à la méthode d'identification statistique. La méthode que nous avons développée s'effectue en deux temps: la première étape consiste à faire un apprentissage de la relation masses-fréquences à l'aide de la technique des réseaux de neurones; la seconde étape consiste à interpoler les masses correspondant aux fréquences détectées. Ces masses sont introduites comme des estimés initiaux du processus itératif de la méthode d'identification statistique pour affiner les résultats.

Les résultats montrent que l'erreur d'estimation de la masse aux essieux est inférieure à 5%, à condition d'avoir un apprentissage suffisant de la relation masses-fréquences et de posséder un modèle mathématique suffisamment précis du comportement modal de la structure. La problématique essentielle de cette méthode est qu'elle suppose une matrice de rigidité constante, ce qui n'est pas forcément le cas pour une remorque, la pression des pneus pouvant varier, par exemple. Dans ce cas, il faudrait modifier la méthode pour inclure la rigidité des pneus comme une variable du problème.

## 1.0 INTRODUCTION

La nouvelle réglementation de capacité de chargement de camions étant basée sur la charge aux essieux plutôt que sur la charge totale, le problème d'estimation de la charge aux essieux de remorques, en système embarqué, est de plus en plus d'actualité. En collaboration avec

les ministères des transports du Québec et du Canada, une étude de faisabilité pour identifier les masses aux essieux d'une remorque à partir du comportement modal de celle-ci a été entreprise. Les fréquences de résonance étant fonction du rapport de rigidité sur la masse de la structure, il est possible d'estimer la matrice de masse en supposant la matrice de rigidité comme constante dans la gamme de chargement et en résolvant le problème inverse de valeurs propres à partir de la mesure des fréquences de résonance. Plusieurs méthodes ont été examinées parmi lesquelles la méthode d'identification des masses par régression linéaire de la loi de masse en fonction de la variation de la première fréquence de résonance de la remorque, ainsi que la méthode de réponse impulsionnelle. Dans notre cas d'application, ces deux méthodes ont montré des inconvénients qui les rendent inapplicables. La technique que nous avons retenue est basée sur une combinaison de la méthode des réseaux neuronaux pour approximer les masses aux essieux à la méthode d'identification statistique pour affiner les résultats. Ceux-ci ont montré une erreur d'estimation de la masse inférieure à 5 %, dans les cas où la rigidité de la structure est constante. D'autres développements seraient nécessaires lorsque ce n'est pas le cas, comme par exemple introduire les rigidités variables comme des inconnues du problème.

Le détail de ces méthodes est décrit dans les rapports BGM-90-421, BGM-91-307, BGM-91-335 et RDM-91-379. Le présent document résume la technique combinée d'identification statistique à celle des réseaux neuronaux.

La technique que nous avons employée pour résoudre le problème inverse de valeurs propres est la méthode d'identification statistique (1). Cette méthode itérative minimise l'erreur au sens des moindres carrés entre les paramètres modaux mesurés, auxquels on associe l'information sur l'erreur de mesure, et ceux calculés à partir d'estimés initiaux de masse auxquels on associe leur incertitude.

## 2.0 MÉTHODE D'IDENTIFICATION STATISTIQUE

Considérons le problème de valeurs propres:

$$([K] - f_{2i}^2 [M]) \{X_i\} = \{0\} \quad (1)$$

où [K] représente la matrice de rigidité  
 [M] représente la matrice de masse  
 $f_{2i}$  représente la  $i^{\circ}$  valeur propre  
 $\{X_i\}$  représente le  $i^{\circ}$  vecteur propre

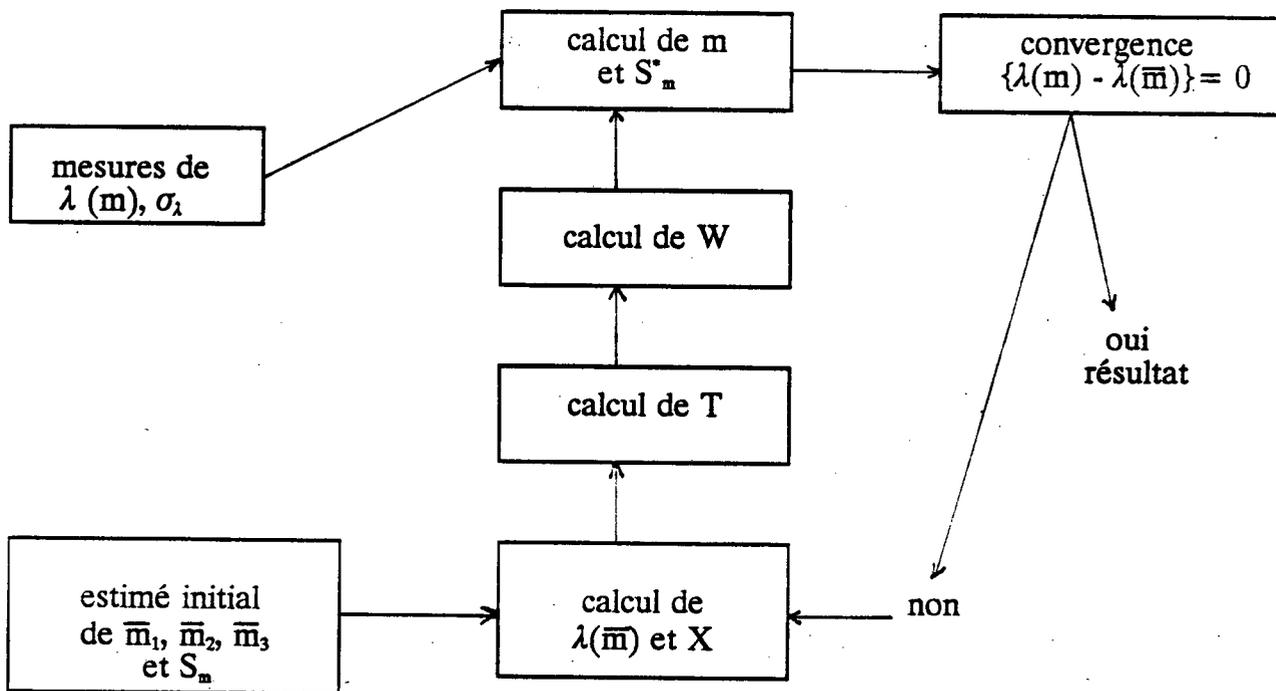
DOR-CEN-MON

CANQ  
 TR  
 248  
 V. 8

Le problème est de déterminer les composantes  $\{r\}$  de la matrice  $[M]$  à partir de la mesure de quelques valeurs propres  $f_{2i}$  auxquelles on adjoint une erreur d'observation  $e_i$ .

Pour éviter une infinité de solutions, on doit imposer des contraintes sur la matrice de rigidité. Dans notre cas, on a supposé la matrice  $[K]$  connue.

Pour fin de compréhension, la méthode développée par COLLINS [1] est résumée à l'annexe A. Le processus itératif utilisant les équations (1),(3),(15),(17) et (20) de l'annexe A est décrit à la figure 1.



### 1- Identification statistique

La procédure est la suivante:

À partir d'un estimé initial des paramètres recherchés (les masses dans notre cas) et d'une incertitude sur ceux-ci, on calcule les valeurs et vecteurs propres correspondants et la sensibilité des valeurs propres par rapport aux paramètres. En introduisant les paramètres observés (valeur propre mesurée et son incertitude), on calcule la matrice de minimisation de variance, les nouvelles valeurs de masse et leur variance que l'on introduit dans la boucle itérative. Le processus itératif est terminé lorsque les valeurs propres correspondant aux masses déterminées sont semblables à celles mesurées.

Cette méthode a l'avantage de pouvoir fonctionner avec des observations incomplètes, mais a l'inconvénient d'imposer quelques restrictions importantes pour être utilisable dans notre cas:

- on impose la connaissance de la matrice de rigidité. Ceci suppose que celle-ci est constante quelque soit la charge;
- on doit donner un estimé initial aux masses. Cet estimé doit être à 75% de la valeur recherchée pour que le processus converge.

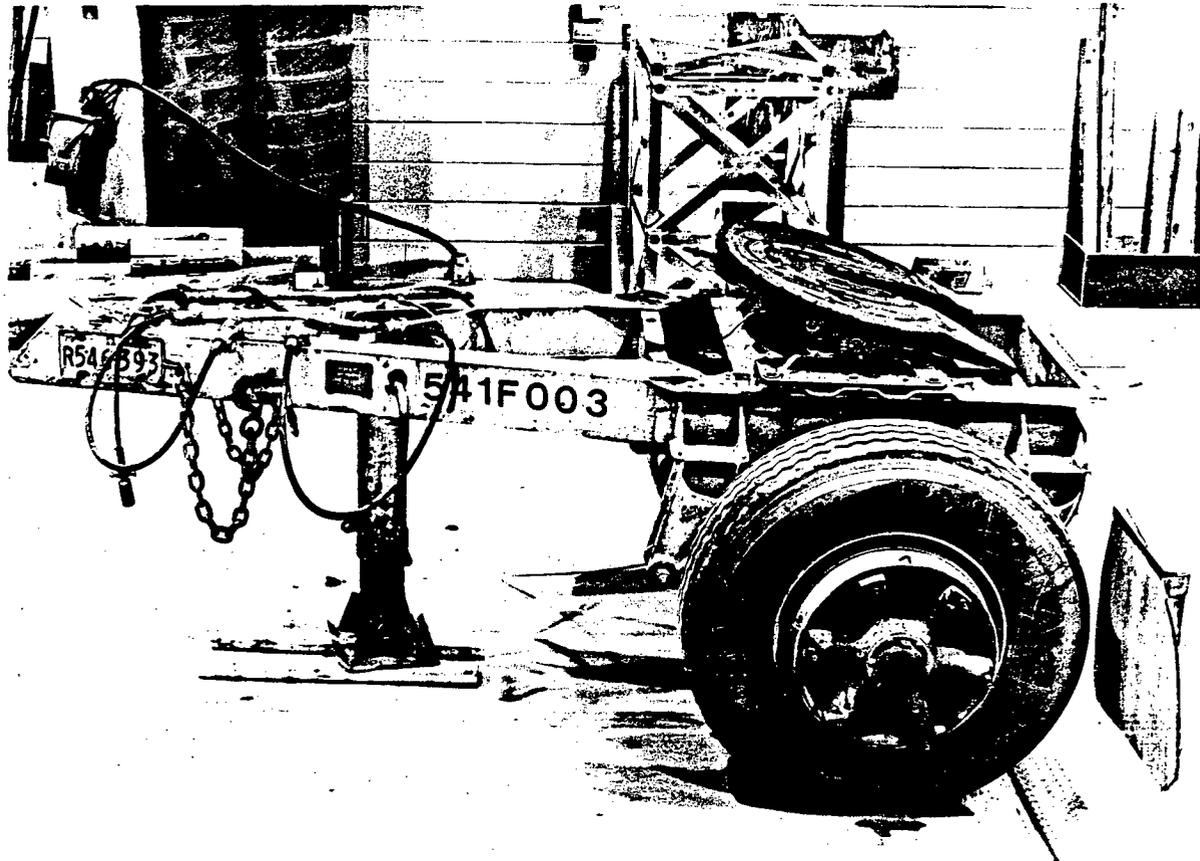
Pour en tester la validité, une campagne de mesure a été effectuée sur un type de remorque.

### **3.0. BANC D'ESSAI DE REMORQUE**

Afin d'étudier la sensibilité des fréquences de résonance à la variation de masse, des essais de chargement sur une remorque ont été effectués. Une remorque à deux essieux (fig 2-A), montée sur un essieu avant (fig 2-B), a été équipée de 6 balances de pesée pour vérifier la masse aux essieux et l'ensemble a été chargé de blocs de béton pesant approximativement 1500 kilogrammes chacun.



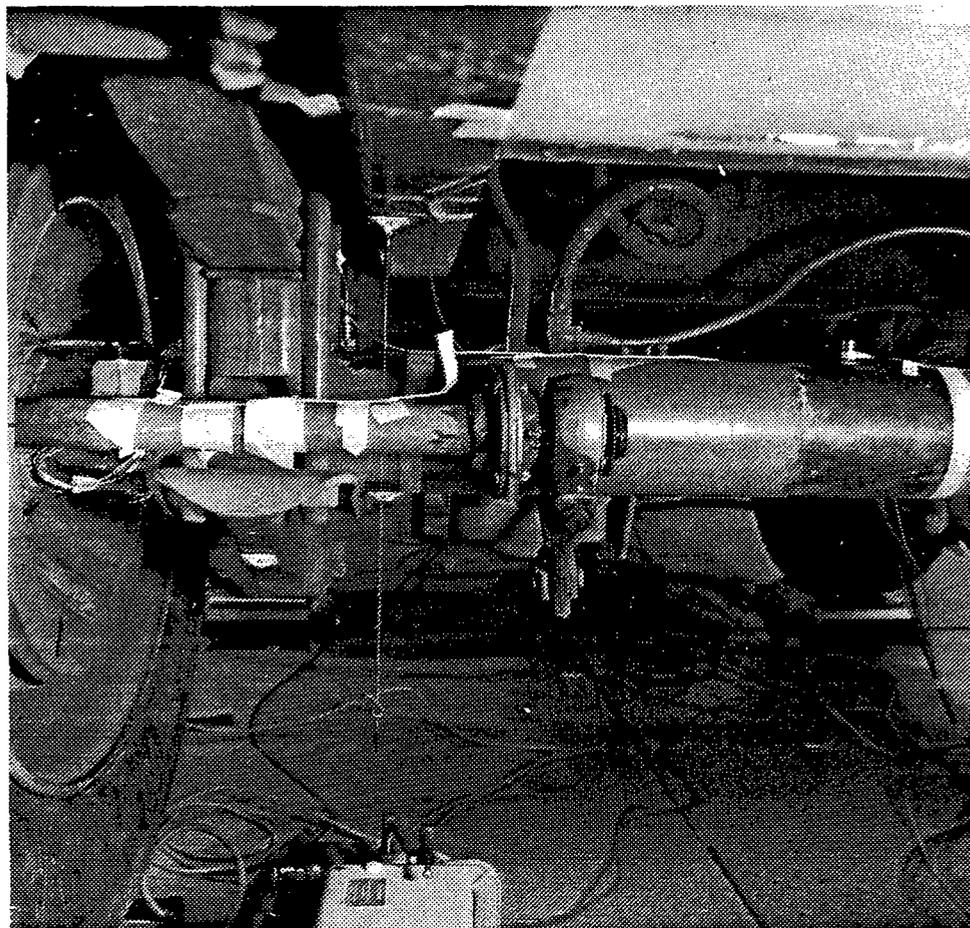
2-A Remorque d'essai



### 2-B Essieu avant

Un accéléromètre a été installé au milieu de l'essieu arrière (fig. 3-A) et la mesure des fréquences de résonance a été prise pour chaque cas de chargement, en appliquant la technique d'impact à l'aide d'un marteau muni d'un capteur de force. L'impact a été donné sur le chassis au milieu de la remorque.

La mesure de la fonction de transfert  $A/F$  entre l'accélération et la force, dans le domaine fréquentiel, donne les fréquences de résonance de la remorque. La figure 3-B montre les fréquences de résonance de la remorque à vide dans une gamme de 0 à 15 Hz (en abscisse). La courbe supérieure montre le déphasage (de 0 à 360 degrés) entre l'accélération et la force et la courbe inférieure l'amplitude du rapport de l'accélération sur la force. Les fréquences de résonances correspondent aux fréquences montrant un maximum d'amplitude et un déphasage de 90 ou 270 degrés.



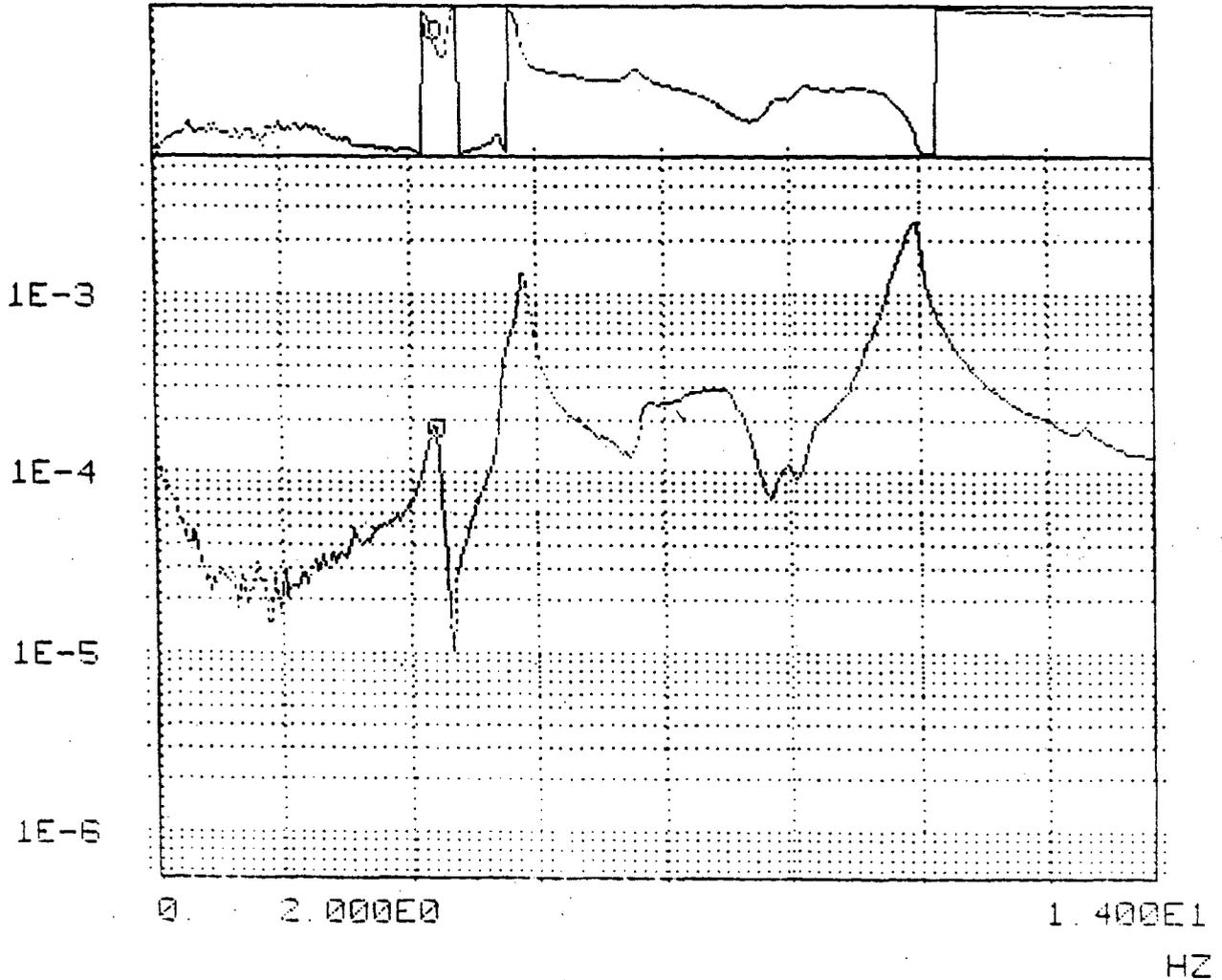
### 3-A Position de l'accéléromètre

Le chargement de la remorque a varié en intensité (de 0 à 9 000 kg) et en position. Les différents cas de chargement sont montrés à la figure 4. Cette figure montre la position approximative des blocs de béton et leur nombre ainsi que les fréquences de résonance identifiées pour chaque cas de chargement. On constate que la variation des fréquences de résonance est sensible à la variation de masses. Cependant, la détermination de certaines fréquences de résonance n'est pas évidente avec un seul point de mesure, d'où les points d'interrogation dans le tableau. L'exemple de fonction de transfert ( $A/F$ ) (fig 5) montre la difficulté de lecture de certaines résonances pour certains cas de charge, les deux premières, qui reflètent les modes rigides, étant les plus facilement identifiables.

FRF AUG 10

DG

EU



3-B Fonction de transfert (remorque à vide)

#### 4.0 MODELE THÉORIQUE DE LA REMORQUE

La méthode d'identification statistique nécessite la connaissance de la matrice de rigidité équivalente de la remorque. À cette fin, un modèle très simplifié de celle-ci a été créé. Étant donné qu'on recherche les 3 masses aux essieux, la remorque a été modélisée comme un système masses-ressort à trois degrés de liberté avec les masses concentrées aux noeuds (fig 6).

La rigidité des pneus et des amortisseurs a été mesurée à l'aide de capteurs déplacements (fig. 6-B) et celle-ci s'est avérée linéaire.

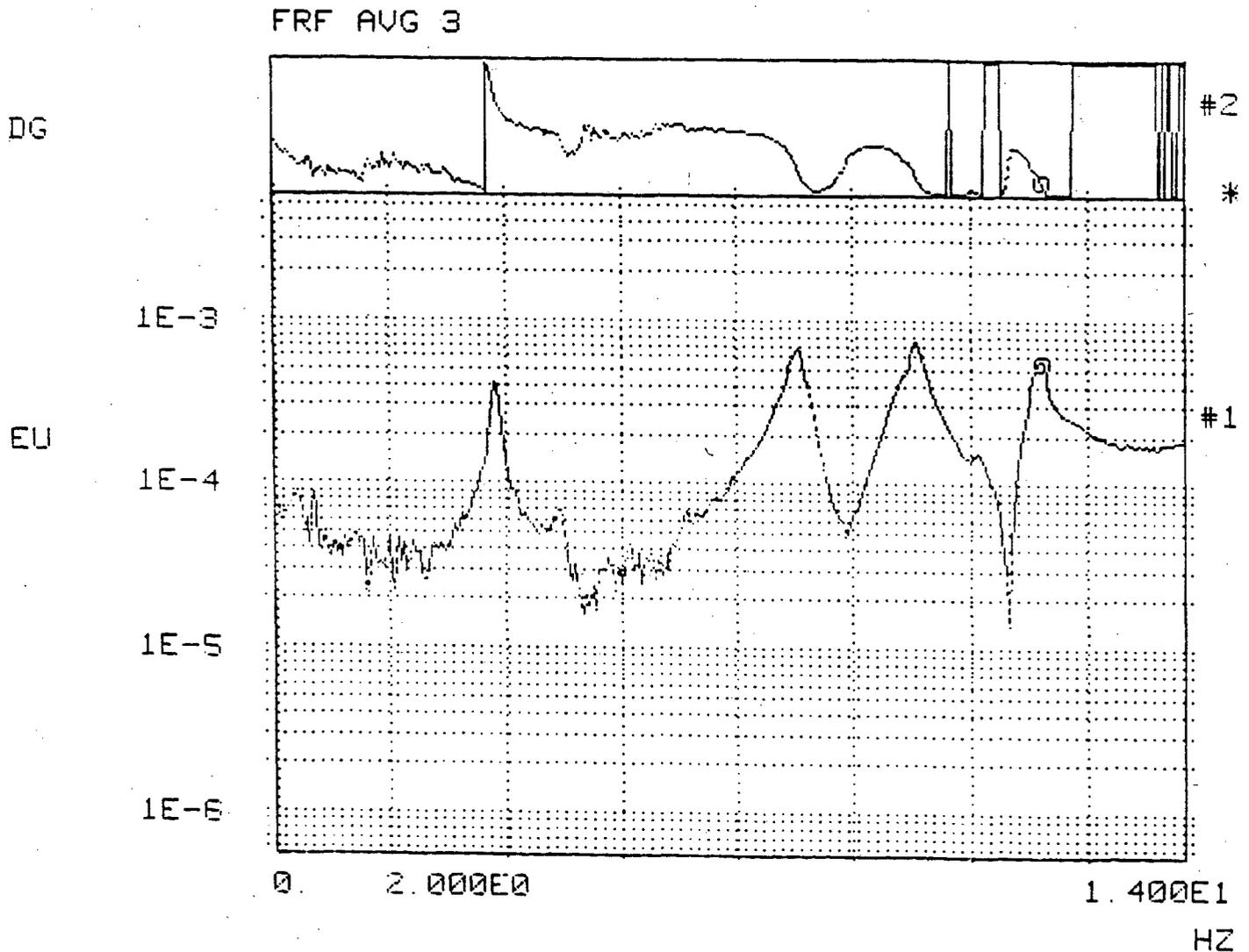
Les masses mesurées aux essieux pour chaque cas de chargements ont été introduites dans ce modèle pour calculer les fréquences de résonance correspondantes.

Cas de charge (Poids total lb)	Position charge										Fréquence (Hz)						
	arrière					avant					f1	f2	f3	f4	f5		
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10						
Vide V0 (14555)												4,375	5,820	7,53	8,58	11,91	
1 bloc (17700)																	
V1		X										4,258	4,844	5,547	8,894	11,05	
V2				X								4,102	5,391	7,3	9,102	10,94	
V3							X					3,867	5,781	8,633	10,74	11,52	
V4											X	3,672	5,586	7,461	9,141	11,56	
2 blocs (20800)																	
V5		X	X									4,023	?	5,547	8,516	11,21	
V6			X	X								3,828	?	?	9,063	11,05	
V7							X	X				3,477	5,82	8,398	10,55	11,68	
V8									X	X		?	5,586	?	8,867	11,80	
3 blocs (23800)																	
V9		X	X								X	3,672	4,336	5,313	8,203	10,5	
V10					X	X	X					3,320	?	5,508	8,438	10,35	
V11		X	X	X								3,789	4,531	?	8,516	10,66	
V12								X	X	X		?	5,547	8,438	?	?	
4 blocs (27000)																	
V13		X		X			X				X	3,320	4,414	5,00	7,188	10,47	
V14		X	X	X	X							3,516	4,57	5,43	8,125	10,51	
V15						X	X	X	X			3,047	?	5,08	8,359	10,39	
V16							X	X	X	X		?	5,469	7,969	10,86	12,50	
5 blocs (30100)																	
V17		X	X	X	X	X						3,281	4,57	?	7,656	10,7	
V18							X	X	X	X	X	?	5,234	7,695	?	11,41	
V19		X		X			X				X	3,164	4,258	?	7,031	10,94	
V20				X	X	X	X	X				2,930	?	5,273	8,398	?	
6 blocs (32900)																	
V21		X	X	X													
V22		X	X	X	X	X	X					3,125	4,375	5,195	7,656	9,883	
V23				X	X	X						2,852	4,727	5,039	8,242	11,84	
V24				X	X	X											
V24					X	X	X	X	X	X	X	2,852	?	5,195	7,656	8,438	
												2,656	4,922	?	7,695	10,90	

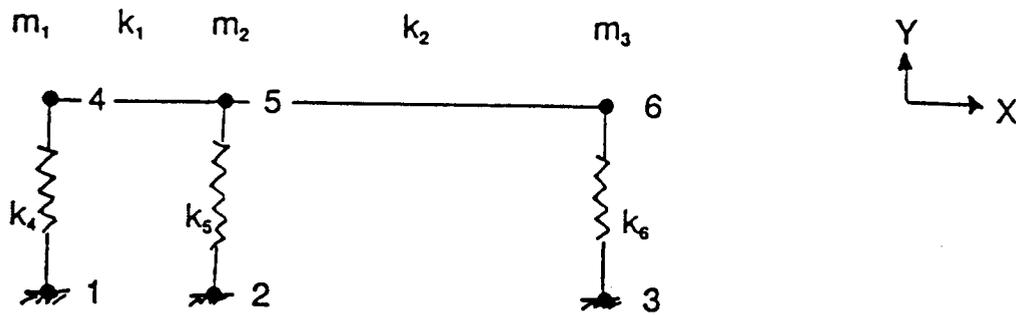
#### 4- Fréquences en fonction de la charge et de sa position

La figure 7 montre la concordance entre les fréquences de résonance des deux premiers modes calculées et mesurées pour chaque cas de chargement.

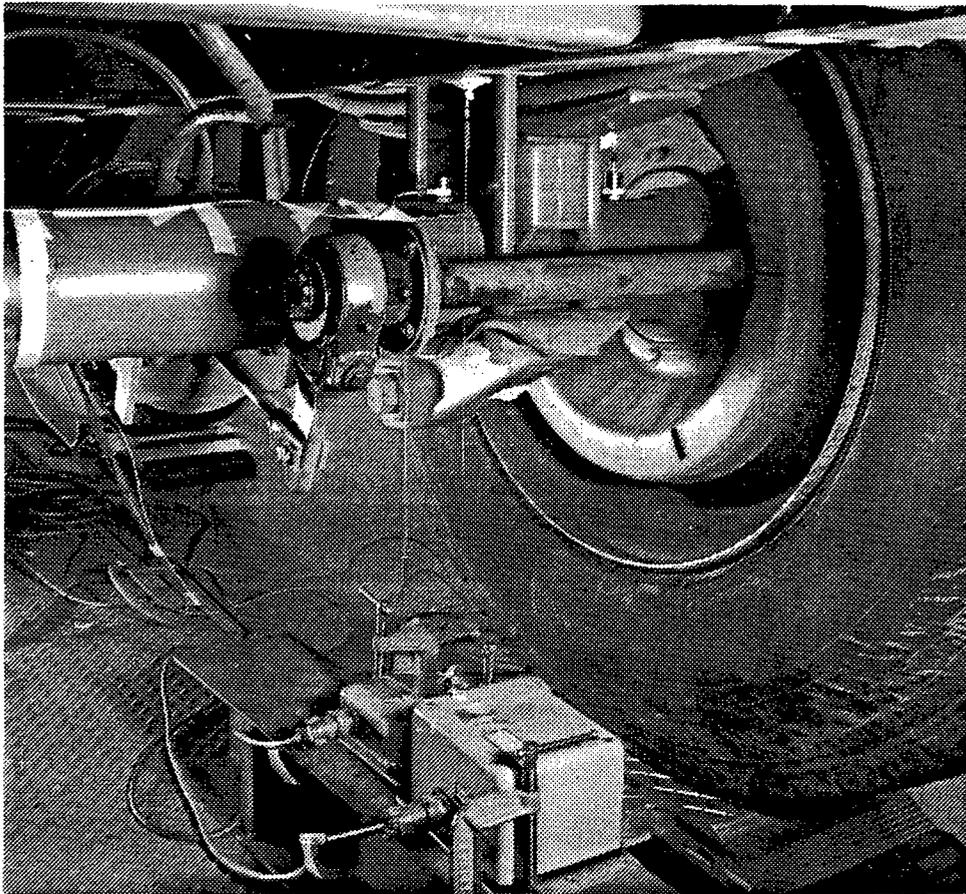
On constate que l'erreur maximale du modèle est de 8 % pour le premier mode et de 20 % pour le deuxième. Ce modèle pourrait par conséquent être amélioré en augmentant le nombre de degrés de liberté à 6 par exemple, mais la simplicité en souffrirait et nous avons jugé ce modèle suffisant pour une étude de faisabilité.



5- Fonction de transfert (remorque de deux blocs de béton)



6- Modèle à trois degrés de liberté



6-B Mesure de la rigidité

La matrice de rigidité condensée (en N/m) a été calculée selon les équations:

$$[X]'[K][X]=[f2] \quad (21)$$

$$[X]'[M][X]=[I] \quad (22)$$

soit:  $[K]=10^6$

11,8	-11,3	1,8		(2)
	15,6	-2,1		(3)
sym		2,6		(4)

## 5.0 INFLUENCE DE L'ESTIMÉ INITIAL

Ayant en main toutes les données du problème, nous avons, dans un premier temps, tenté d'approximer les estimés initiaux de masse par une interpolation linéaire de la valeur propre du mode rigide ( $f_1$ ) en fonction des masses mesurées aux essieux, montrées à la figure 4. Les valeurs obtenues étaient assez éloignées de la solution; l'erreur maximale étant de 65% pour certains cas de charge. À partir de ces valeurs, la technique d'identification statistique a été appliquée en utilisant comme vecteur observation seulement les deux premières fréquences de résonance calculées. Les résultats ont montré que le système pouvait diverger de la solution, l'erreur maximale s'élevant à 74%.

CAS DE CHARGE	F1 EXP	F1 THEO	ERREUR	F2 EXP	F2 THEO	ERREUR
VO	4.38	4.38	0	5.83	5.83	0
V1	4.3	4.47	3.9	4.81	4.81	0
V2	4.14	4.15	0.2	5.35	5.08	5
V3	3.88	3.88	0	5.74	5.4	5.9
V4	3.64	3.64	0	5.62	5.86	4.3
V5	4.06	4.25	4.7	?	4.42	?
V6	3.87	4.08	5.4	?	4.5	?
V7	3.5	3.5	0	5.78	5.12	11.4
V8	?	3.19	?	5.62	5.77	2.7
V9	3.65	3.65	0	4.33	4.33	0
V10	3.36	3.41	1.5	?	4.56	?
V11	3.83	3.92	2.3	4.49	4.36	2.9
V12	?	2.9	?	5.58	5.6	0.4
V13	3.28	3.22	1.8	4.38	4.27	2.5
V14	3.55	3.71	4.5	4.53	4.1	9.5
V15	3.08	3.12	1.3	?	4.43	?
V16	?	2.73	?	5.43	5.34	1.7
V17	3.32	3.53	6.3	4.53	3.84	15.3
V18	?	2.6	?	5.2	4.96	4.6
V19	3.13	3.1	1	4.22	3.99	5.5
V20	2.97	3.03	2	?	4.09	?
V21	3.16	3.18	0.6	4.34	4.14	4.6
V22	2.85	3	5.3	4.69	3.79	19.2
V23	2.89	3.12	8	?	3.67	?
V24	?	2.53	?	4.88	4.63	5.1

## 7- Concordance entre les essais théoriques et expérimentaux

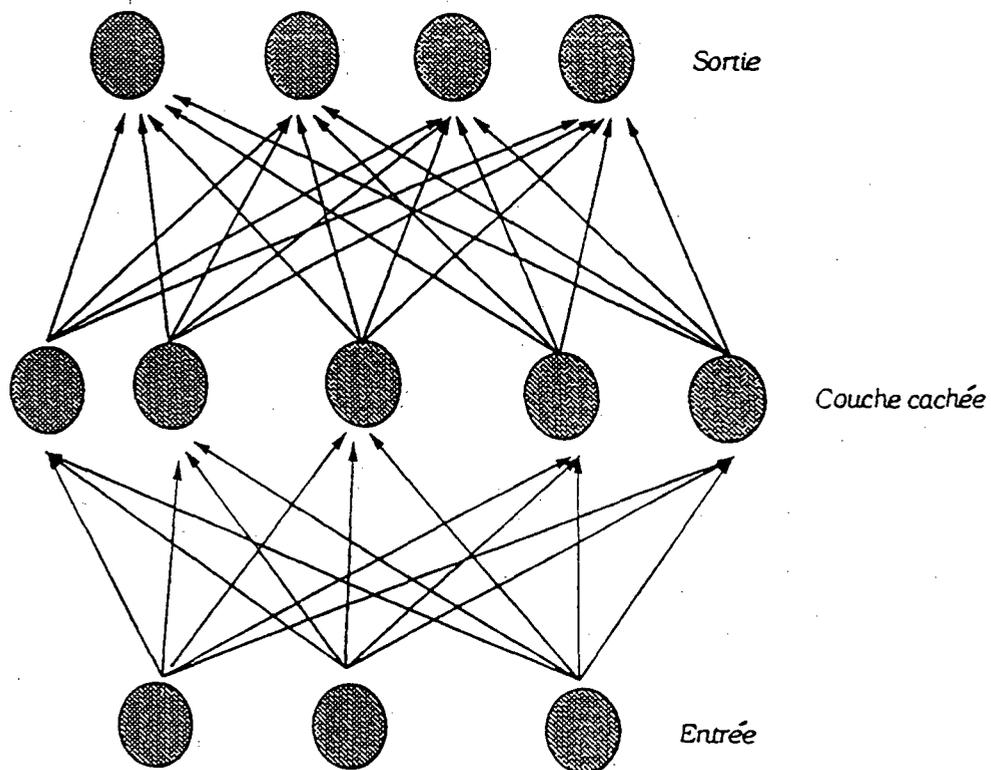
L'incertitude sur l'estimé initial est donc cruciale pour la validité de la méthode. Pour répondre à ce problème, nous avons envisagé une nouvelle technique pour estimer les paramètres initiaux de masse, celle des réseaux neuronaux.

## 6.0 MÉTHODE DES RÉSEAUX NEURONAUX

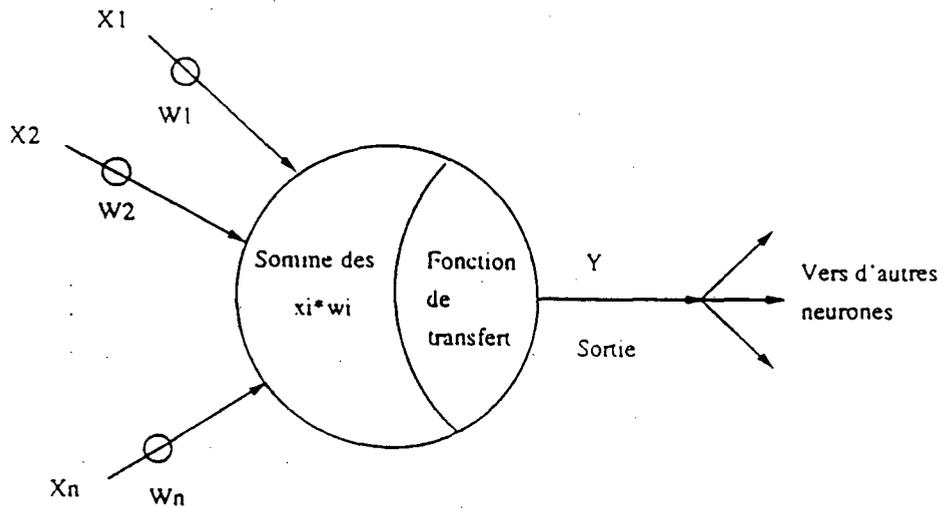
Cette technique s'effectue en deux étapes. La première consiste à faire l'apprentissage d'un système à partir d'un ensemble connu de relations fréquences-masses. La seconde consiste à interpoler les masses à partir de fréquences données. La technique BP, dite de rétro-Propagation, à 3 couches [3] a été employée. Chaque couche est un regroupement de plusieurs neurones ayant tous les mêmes fonctions. La couche d'entrée comprend 3 fréquences de résonances et la couche de sortie comprend les 3 masses correspondant à

chaque essieu. Nous avons utilisé une seule couche cachée qui comprenait 30 neurones (fig 8).

Chaque neurone d'une couche est entièrement connecté aux neurones de la couche suivante. Un neurone artificiel fait la somme de ses  $N$  entrées  $x_i$  multipliées par des coefficients de pondération  $w_i$  et transforme cette somme par une fonction de transfert (fig 9).



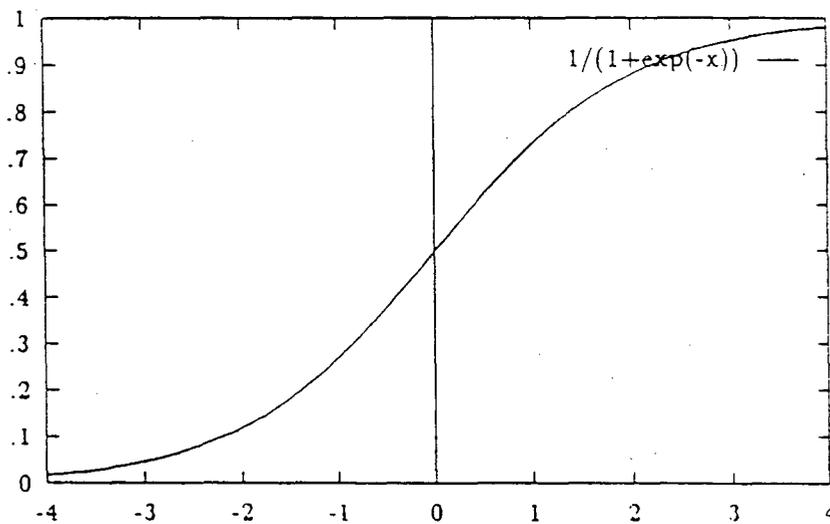
**8- Réseau de neurones**



### 9- Neurone artificiel

La fonction de transfert utilisée est la sigmoïde montrée à la figure 10.

L'étape d'apprentissage consiste à calculer les coefficients de pondération entre chaque connectivité de neurones de façon à minimiser l'erreur quadratique entre l'entrée et la sortie.



10- Fonction de transfert

Une fois cet apprentissage effectué, la méthode permet de déterminer les masses correspondantes à tout nouvel ensemble de fréquences de résonance.

L'apprentissage a été effectué à l'aide de 19 ensembles masses-fréquences obtenus du calcul théorique (fig 11).

CAS DE CHARGE	MASSES MESUREES (KG)			MASSES ESTIMEES/RESEAUX NEURONAUX (KG)					
	M1 ARRIERE	M2 CENTRE	M3 AVANT	M1 ARRIERE	ERREUR/M1 %	M2 CENTRE	ERREUR/M2 %	M3 AVANT	ERREUR/M3 %
V0	1687	1824	3104	1825	8.1	2031	11.3	3484	12.3
V1	2566	2541	2970	2324	9.4	2400	5.6	3250	9.5
V2	2185	2452	3446	2095	4.1	2282	6.9	3509	1.8
V4	1602	1891	4501	1809	12.9	2084	10.2	4415	1.9
V5	3344	3177	3021	3329	0.5	3170	0.2	3174	5.1
V6	2834	3045	3557	2720	4	2821	7.4	3416	4
V8	1584	2050	5849	1820	14.9	2185	6.6	6046	3.4
V9	3093	3248	4463	2870	7.2	3208	1.2	4202	5.8
V10	2598	3206	5123	2514	3.2	3008	6.2	5176	1
V12	1638	2225	7107	1845	12.6	2321	4.3	7467	5.1
V13	3117	3437	5722	2885	7.4	3525	2.6	5921	3.5
V14	4340	4274	3501	4663	7.4	4427	3.6	3346	4.4
V16	1721	2549	8034	1895	10.1	2498	2	8165	1.6
V17	4751	4769	3996	4872	2.6	4704	1.4	3647	8.7
V18	2072	2857	8797	2036	1.7	2833	0.8	8467	3.7
V20	3187	4007	6480	3227	1.2	3965	1	6598	1.8
V21	6116	5459	3422	5479	10.4	5100	6.6	3595	5
V22	3840	4529	6599	3807	0.9	4514	0.4	7048	6.8
V24	2322	3355	9327	2250	3.1	3230	3.7	8541	8.4

### 11- Apprentissage du réseau de neurones

Cet apprentissage a montré une erreur maximale de 15% dans l'estimation de la masse. Cette erreur élevée montre que ce nombre de cas est nettement insuffisant pour un apprentissage adéquat. Quoiqu'il en soit, nous avons expérimenté la méthode avec 7 nouvelles valeurs de fréquences provenant du modèle théorique (fig 12).

CAS DE CHARGE	MASSES MESUREES (KG)			MASSES ESTIMEES/RESEaux NEURONAUX (KG)					
	M1	M2	M3	M1	ERREUR/M1	M2	ERREUR/M2	M3	ERREUR/M3
	ARRIERE	CENTRE	AVANT	ARRIERE	%	CENTRE	%	AVANT	%
V3	1908	2240	3945	1920	0.6	2171	3.1	3928	0.4
V7	2039	2568	4851	2024	0.8	2389	7	4948	2
V11	3888	3792	3095	4319	11.1	4014	5.9	3184	2.9
V15	2729	3421	6130	2630	3.6	3336	2.5	6509	6.2
V19	3555	3949	6180	3433	3.4	4089	3.5	6228	0.8
V23	4122	4758	6074	4204	2	4607	3.2	5767	5
	2500	4545	4545	3091	23.6	3445	24.2	4465	1.8

## 12- Estimation de masses par réseau de neurones

L'erreur maximale d'estimation de masse a été de 11% sauf pour le dernier cas où les fréquences données (3,6, 4,3 et 14 Hz) étaient similaires aux fréquences apprises du cas de charge V9 (fig 7) et le résultat a retrouvé les masses apprises (fig 11) au lieu de la solution. Ce dernier résultat montre le manque d'apprentissage de la méthode.

## 7.0 MÉTHODE D'IDENTIFICATION STATISTIQUE COMBINÉE AUX RÉSEaux NEURONAUX

Les résultats des réseaux neuronaux ont été introduits comme estimés initiaux de masse dans la méthode d'identification statistique. Uniquement, les deux premières fréquences de résonance correspondantes à ces masses ont été considérées comme vecteur observation (fig 7). L'erreur de mesure a été considérée de 3 % sur la première fréquence et de 5 % sur la deuxième. L'incertitude sur les paramètres de masse a été considérée de 13 %. Les résultats sont montrés à la figure 13. L'erreur maximale d'estimation de masse est descendue à 5%, même avec un ensemble incomplet de données.

CAS DE CHARGE	MASSES MESUREES (KG)			MASSES ESTIMEES/IDENTIFICATION (KG)					
	M1	M2	M3	M1	ERREUR/M1	M2	ERREUR/M2	M3	ERREUR/M3
	ARRIERE	CENTRE	AVANT	ARRIERE	%	CENTRE	%	AVANT	%
V0	1687	1824	3104	1665	1.3	1886	3.4	3013	0
V1	2566	2541	2970	2524	1.7	2551	0.4	2968	0
V2	2185	2452	3446	2210	1.1	2380	2.9	3449	0
V3	1871	2240	3945	1919	2.6	2170	3.1	3932	0.3
V4	1602	1891	4501	1624	1.4	1904	0.7	4495	0.1
V7	2039	2568	4851	2096	2.8	2463	4.1	4861	0.2
V9	3093	3248	4463	3007	2.8	3332	2.6	4447	0.4
V11	3888	3792	3095	3927	1	3776	0.4	3104	0.3
V13	3117	3437	5722	2966	4.8	3614	5.1	5737	0.3
V14	4340	4274	3501	4364	0.6	4239	0.8	3495	0.2
V17	4751	4769	3996	4816	1.4	4670	2.1	3972	0.6
V19	3555	3949	6180	3444	3.1	4100	3.8	6184	0
V21	6116	5459	3422	6085	0.5	5461	0	3425	0
V22	3840	4529	6599	3831	0.2	4538	0.2	6606	0.1

### 13- Estimation de masse par identification statistique combinée aux réseaux neuronaux

## 8.0 CONCLUSION

La méthode d'identification statistique permet de déterminer les paramètres initiaux qui ont généré un résultat, même si ce résultat est incomplet. Toutefois, la détermination des paramètres initiaux du processus itératif est prépondérante pour assurer la convergence. À cette fin, la méthode des réseaux neuronaux s'avère un outil efficace lorsque un apprentissage est possible.

Aussi, les champs d'application sont vastes. Le problème pourrait être inversé pour déterminer la rigidité au lieu de la masse et ainsi l'affaiblissement de structures. La méthode pourrait être également adjointe à un logiciel de calcul de structures pour évaluer les modifications nécessaires à un changement de design en fonction du résultat désiré.

Dans notre application pour déterminer la masse d'une remorque, la principale limitation est qu'il faut imposer une matrice de rigidité constante, ce qui n'est pas évident. Une solution à ce problème serait d'inclure le paramètre de rigidité pneu-amortisseur comme une autre variable du problème à diagnostiquer. Le modèle mathématique devrait également être amélioré en augmentant le nombre de degrés de liberté, afin de mieux refléter la réalité.

## 9.0 RÉFÉRENCES

1. Collins, J.D. and al, *Statistical Identification of Structures*, AIAA J., Vol 12, No 2, Feb 74, p. 185-190.
2. Fox, R.L. and Kapoor, M.P., *Rates of change of eigenvalues and eigenvectors*, AIAA J., Vol 6, No 12, Dec 68, p. 2426-2429.
3. Rumelhart, D.E., *Learning internal representations by error propagation*, Technical Report 8506, U. of California, San Diego, Sept 85.

**ANNEXE A****MÉTHODE D'IDENTIFICATION STATISTIQUE**

Considérons le problème de valeurs propres:

$$([K] - f_{2i} [M]) \{X_i\} = \{0\} \quad (1)$$

où  $[K]$  représente la matrice de rigidité  
 $[M]$  représente la matrice de masse  
 $f_{2i}$  représente la  $i$  ème valeur propre  
 $\{X_i\}$  représente le  $i$  ème vecteur propre

Le vecteur observation  $\{Y\}$  peut être estimé en fonction du vecteur à estimer  $\{R\}$  par la relation:

$$\{Y\} = [T] \{R\} + \{e\} \quad (2)$$

où  $\{e\}$  représente l'erreur de mesure de l'observation

$\{Y\} = \{f_{2m} - f_{2p}\}$  représente l'écart entre la valeur propre mesurée  $f_{2m}$  et celle  $f_{2p}$  calculée à partir des estimés initiaux de masse.

$\{R\} = \{r - r_p\}$  représente l'écart entre les paramètres de masse à estimer  $r$  et les paramètres initiaux  $r_p$ .

et  $[T] = d[f_2]/dr$  représente la matrice de sensibilité de l'observation par rapport aux paramètres recherchés.

L'objectif est de déterminer le meilleur estimé de  $\{R\}$ , désigné par  $\{R''\}$ :

$$\{R''\} = [W] \{Y\} \quad (3)$$

où  $[W]$  minimise la variance révisée  $[S_{rr}'']$  entre  $\{R\}$  et  $\{R''\}$ .

$$[Srr'] = E\langle\{R''-R\}\{R''-R\}'\rangle \quad (4)$$

où  $E \langle \rangle$  indique l'espérance et l'indice [ ]' la transposition.

D'après (3), on a la relation:

$$[Srr'] = E\langle\{[W]\{Y\}-\{R\}\}\{[W]\{Y\}-\{R\}\}'\rangle \quad (5)$$

$$= [W][Syy][W]' - [W][Syr] - [Syr]'[W]' + [Srr] \quad (6)$$

où  $[Syy] = E\langle\{Y\}\{Y\}'\rangle \quad (7)$

D'après (2), on a la relation:

$$[Syy] = E\langle\{[T]\{R\}+\{e\}\}\{[T]\{R\}+\{e\}\}'\rangle \quad (8)$$

soit, en supposant l'indépendance entre  $\{R\}$  et  $\{e\}$ :

$$[Syy] = [T][Srr][T]' + [See] \quad (9)$$

et  $[Syr] = E\langle\{Y\}\{R\}'\rangle \quad (10)$

D'après (2), on obtient:

$$[Syr] = E\langle\{[T]\{R\}+\{e\}\}\{R\}'\rangle \quad (11)$$

$$= [T][Srr] \quad (12)$$

En effectuant la variation de  $[Srr']$  (eq 6) par rapport à  $[W]$ , on trouve:

$$[0] = D[W]([Syy][W]' - [Syr]) + ([W][Syy] - [Syr]')D[W]' \quad (13)$$

soit

$$[W] = [Syr]'[Syy]^{-1} \quad (14)$$

En remplaçant (9) et (12) dans (14), on obtient:

$$[W] = [Srr][T]'([T]^{-1} [Srr][T]' + [See]) \quad (15)$$

et, en remplaçant (9), (12) et (14) dans (6), on obtient:

$$[Srr''] = [Srr] - [Syr]'[Syy] [Syr]^{-1} \quad (16)$$

et, en considérant (12) et (14):

$$[Srr''] = [Srr] - [W][T][Srr] \quad (17)$$

La matrice de sensibilité T est définie comme suit [2]:

$$\{X_i\}'([K] - f_{2i}[M])\{X_i\} = 0 \quad (18)$$

En différentiant (18) par rapport au paramètre de masse recherché  $r_j$ , on obtient:

$$-d(f_{2i})/d(r_j)\{X_i\}'[M]\{X_i\} - f_{2i}\{X_i\}'(d[M]/d(r_j))\{X_i\} = 0 \quad (19)$$

En normalisant le vecteur propre tel que  $\{X_i\}'[M]\{X_i\} = 1$ , on trouve:

$$[T] = [-f_{2i} \{X_i\}'(d[M]/d(r_j))\{X_i\}] \quad (20)$$

## NOMENCLATURE

[K]	matrice de rigidité
[M]	matrice de masse
$f^2$	carré de la fréquence de résonance
{X}	mode
r	composantes de la matrice [M]
{Y}	vecteur observation, composé de certaines valeurs $f^2$ .
{e}	erreur de mesure
{R}	vecteur à estimer
[T]	matrice de sensibilité des valeurs propres $f^2$ par rapport aux paramètres r
[Suv]	matrice de covariance entre {u} et {v}
[Srr]	matrice de covariance des paramètres
[See]	matrice de covariance des mesures
[ ]'	indique la transposition
[ ] <sup>-1</sup>	indique l'inversion
E< >	espérance
{R''}	paramètres révisés
d[u]	/dv différentiation de u par rapport à v

ON VA DE **L'AVANT**



Transports  
Québec

MINISTÈRE DES TRANSPORTS



QTR A 056 788