

ÉVALUATION DE LA RÉSISTANCE EN COMPRESSION D'UNE MEMBRURE D'ACIER RENFORCÉE EN SERVICE COMPORTANT DES ACIERS HYBRIDES

Guy Mailhot, ing., M. Eng.

Les Ponts Jacques Cartier et Champlain Incorporée, Longueuil

Résumé

La présente communication expose une méthodologie de calcul générale applicable à l'évaluation de la résistance en compression d'une membrure en acier devant être renforcée sous chargement au moyen de l'ajout de nouvelles plaques. La méthode de calcul proposée est fondée sur le comportement élasto-plastique d'une colonne qui tient compte des principaux paramètres affectant la résistance en compression, soit les défauts de rectitude, les contraintes résiduelles, le niveau de chargement initial, les déformations dans la membrure d'origine au moment de la pose des plaques et l'utilisation d'aciers hybrides.

La communication fait un rappel sur les principaux paramètres affectant le comportement en compression d'une membrure et qui sont considérés dans la formulation de l'équation de base de la norme CAN/CSA S6-06. Dans un premier temps, les techniques de calcul sont décrites et appliquées au cas le plus simple, c'est-à-dire l'évaluation d'une colonne comportant une seule nuance d'acier et sans renfort. Les résultats obtenus sont comparés aux valeurs prévues par la norme afin de démontrer la validité des techniques proposées.

En deuxième lieu, les méthodes de calcul proposées sont appliquées au cas le plus complexe précité et les résultats comparés à ceux obtenus en appliquant et en adaptant de différentes manières l'équation de base de la norme. Le cas étudié permet de faire ressortir les limitations et précautions à prendre dans l'évaluation de la résistance en compression d'une membrure renforcée.

1. Introduction

Il arrive fréquemment que l'ingénieur praticien doit effectuer les calculs en vue de réaliser un renforcement en compression d'une membrure de pont en acier, qu'il s'agisse d'une corde supérieure, d'une poutre triangulée ou d'une colonne ou poteau servant de support à l'ouvrage.

La façon la plus courante et la plus facile est de prévoir l'ajout de plaques ou de profilés en « L » (cornières) aux semelles et/ou à l'âme des parois existantes. Souvent, l'ingénieur exigera l'ajout de nouvelles plaques dont la limite élastique (acier de nuance 300W ou 350W) est supérieure aux nuances d'origine, soit fréquemment de nuance 30, 33, ou 36 ksi. L'utilisation d'acier doté d'une résistance supérieure en termes de limite élastique est généralement avantageuse, toutefois le gain réel peut ne pas être exploité au maximum par certains concepteurs, ce qui est acceptable, bien que conservateur.

Dans le cadre de plusieurs projets de réfection de ponts nécessitant le renfort de membrures en acier, la réalisation des travaux devra satisfaire aux contraintes opérationnelles ce qui implique que les travaux de renforcement doivent être réalisés en présence d'une charge initiale, qu'il s'agisse de la charge permanente (le poids propre de l'ouvrage) ou dans certains ouvrages stratégiques, d'une proportion importante de la surcharge routière.

Le Code canadien sur le calcul des ponts routiers (CAN/CSA S6-06) [1] stipule que l'impact des contraintes emprisonnées dans les membrures doit être pris en considération. Cependant, la

norme fournit peu d'informations ou de prescriptions quant à la méthode de calcul à suivre pour tenir compte de telles contraintes. Par ailleurs, dans son ensemble, la norme actuelle est moins explicite en ce qui concerne les règles de bonne pratique à retenir quand vient le temps d'appliquer la norme aux ouvrages existants. Aussi, la littérature scientifique n'est pas particulièrement riche sur ce sujet, bien que certains ingénieurs chercheurs ou auteurs scientifiques tels que Shek et Bartlett [2] aient abordé le sujet. En contrepartie, la littérature scientifique est extrêmement riche en information portant sur l'analyse d'une colonne à l'état neuf et dans ce cas, le comportement en compression d'une membrure peut être évalué avec une assez grande fiabilité.

Bien que l'équation du code soit précise et facile d'utilisation, elle n'est pas directement applicable à une membrure hybride et/ou d'une membrure renforcée en présence d'une charge initiale. De plus, les notions fondamentales et l'accès aux techniques permettant à l'ingénieur praticien de reproduire les formules du code, même de façon approximative, ne sont pas facilement retrouvables. Toutefois, toutes les informations nécessaires pour effectuer une telle analyse sont généralement disponibles dans la littérature scientifique et peuvent être utilisées pour évaluer le comportement d'une membrure en compression dans la mesure où les notions fondamentales sont maîtrisées.

Dans ce contexte, la présente communication vise à exposer, dans un premier temps, les notions de base et les principaux paramètres affectant la résistance en compression et, dans un deuxième temps, à proposer une méthodologie de calcul permettant d'appliquer ses notions à l'évaluation de la capacité d'une membrure hybride, composée ou non de pièces de renfort et finalement, en présence ou non d'une charge initiale.

2. Notions de base relatives à l'instabilité

Dans le cas d'une colonne parfaite, c'est-à-dire une colonne n'ayant pas de défauts de rectitude et libres de contraintes résiduelles, la charge critique où la membrure deviendra instable est donnée par la formule bien connue d'Euler, soit :

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (\text{Éqn. 1})$$

De manière à faciliter la compréhension du phénomène d'instabilité d'une colonne soumise à un effort axial, Shanley [3] a fait appel à un modèle particulièrement simple qui a été repris par McGuire [4]. Ce même modèle est présenté ci-après. Le modèle en question consiste à examiner le comportement d'une colonne constituée d'un ressort de rigidité k_1 positionné à la mi-hauteur de la membrure et qui est relié aux points de support aux deux extrémités par des extensions infiniment rigides.

En référant à la Figure 1a, l'ingénieur praticien peut facilement établir les équations d'équilibre en fonction de la charge P , de

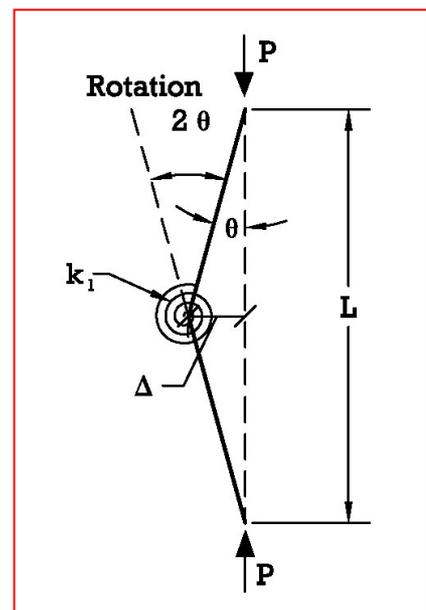


Figure 1a - Modèle d'une colonne à ressort

la rigidité du ressort k_1 , d'une déformée (ou déviation) Δ , et d'une rotation θ des extensions rigides (ou l'équivalent d'une rotation totale de 2θ pour le ressort) comme suit :

$$P \Delta = k_1 2 \theta$$

$$\theta = \Delta / (0,5L)$$

$$P \Delta = k_1 2\Delta / (0,5L) = 4 k_1 \Delta / L$$

où si $\Delta \neq 0$, la charge critique, soit :

$$P_{cr} = 4 k_1 / L \quad (\text{Éqn. 2})$$

Utilisant le même modèle, mais cette fois-ci en considérant une déviation initiale Δ_0 tel que présenté à la Figure 1b, il est également facile de démontrer que :

$$\begin{aligned} P \Delta = M_{\text{ressort}} &= 2k_1 (\theta - \theta_0) \\ &= 2k_1 \left(\frac{2\Delta}{L} - \frac{2\Delta_0}{L} \right) \end{aligned}$$

ou

$$P \Delta = \frac{4k_1}{L} (\Delta - \Delta_0) = P_{cr} (\Delta - \Delta_0)$$

et en redisant les termes pour isoler Δ :

$$P \Delta = P_{cr} (\Delta - \Delta_0)$$

$$P \Delta = P_{cr} \Delta - P_{cr} \Delta_0$$

$$P_{cr} \Delta_0 = \Delta (P_{cr} - P)$$

ou

$$\Delta = \frac{\Delta_0 P_{cr}}{(P_{cr} - P)} = \frac{\Delta_0}{(1 - P/P_{cr})} \quad (\text{Éqn. 3})$$

Le terme $(1 - P/P_{cr})$ au dénominateur de l'Équation 3 est identique à celui d'une véritable colonne où $P_{cr} = \pi^2 EI/L^2$. Par ailleurs, on retrouve ce même terme aux normes CAN/CSA S6-06 et S16-01 pour établir l'amplification du moment exercée sur une colonne en présence d'une charge axiale.

Le présent auteur a adapté le modèle décrit ci-dessus au cas d'une colonne renforcée en présence d'une charge initiale P_i . En référant à la Figure 1c et en considérant le cas où les pièces de renfort sont installées lorsque la charge P est égale à P_i , et que la déviation de la colonne est égale à Δ_1 et en supposant un comportement élastique, on obtient:

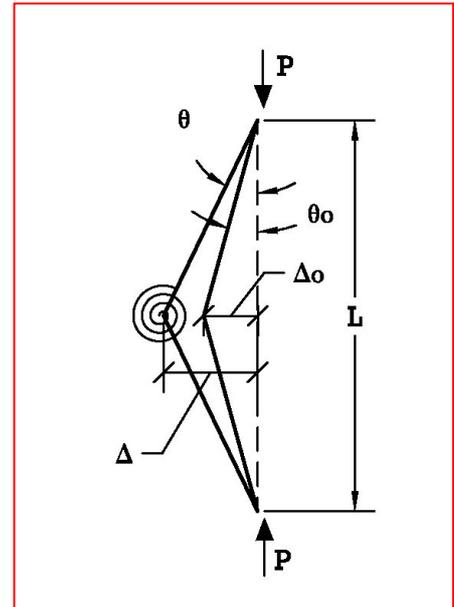


Figure 1b – Modèle d'une colonne avec déviation initiale

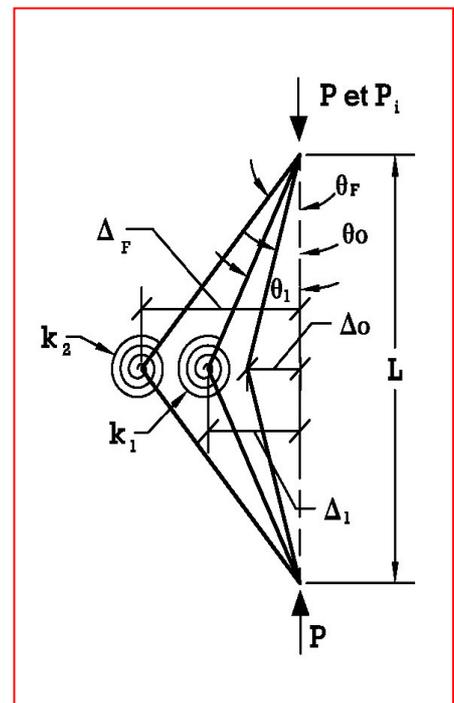


Figure 1c – Modèle d'une colonne avec charge initiale et renfort

$$P \Delta_F = M_{s1} + M_{s2}$$

$$P \Delta_F = 2k_1 (\theta_1 - \theta_0) + 2k_2 (\theta_F - \theta_1)$$

$$= 2k_1 \left(\frac{2\Delta_1}{L} - \frac{2\Delta_0}{L} \right) + 2k_2 \left(\frac{2\Delta_F}{L} - \frac{2\Delta_1}{L} \right)$$

$$= \frac{4k_1}{L} (\Delta_1 - \Delta_0) + \frac{4k_2}{L} (\Delta_F - \Delta_1)$$

en remplaçant les termes $\frac{4k_1}{L}$ et $\frac{4k_2}{L}$ par les termes P_{cr1} et P_{cr2} respectivement on obtient :

$$P \Delta_F = P_{cr1} (\Delta_1 - \Delta_0) + P_{cr2} (\Delta_F - \Delta_1)$$

et finalement en redisant les termes comme il a été fait pour l'Équation 3 :

$$\Delta_F = \frac{\Delta_1 - P_{cr1}/P_{cr2} (\Delta_1 - \Delta_0)}{(1 - P/P_{cr2})} \quad (\text{Éqn. 4})$$

Bien que la démonstration n'ait pas été faite, il apparaît plus que probable que l'expression donnant l'amplification de la déformée dans le cas d'une véritable colonne ayant une rigidité EI_1 et une rigidité totale EI_2 suite au renfort, serait identique à l'Équation 4 avec $P_{cr1} = \pi^2 EI_1 / L^2$ et $P_{cr2} = \pi^2 EI_2 / L^2$. Quant à la valeur de Δ_1 , elle sera calculée au moyen de l'Équation 3 avec $P = P_i$ et $P_{cr} = P_{cr1}$.

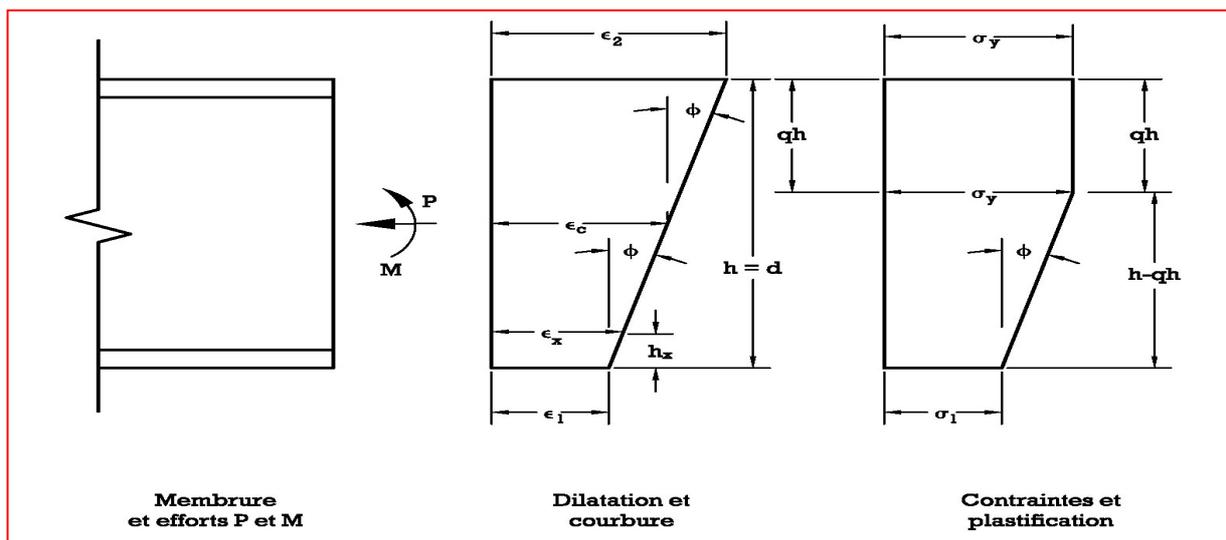


Figure 2 - Dilatation, courbure et plastification de la section en fonction des efforts P et M

Jusqu'à présent, la colonne renforcée ou non a été traitée en supposant un comportement élastique. Par ailleurs, il convient de noter que la limite élastique du matériau n'intervient pas

dans l'établissement de la valeur P_{cr} (qu'il s'agisse d'une véritable colonne ou du modèle à ressort).

Pour tenir compte des propriétés mécaniques et notamment des contraintes résiduelles et la limite élastique de l'acier, il faut d'abord examiner le comportement d'une section soumise à un effort axial P et à un moment M . Ces deux efforts donnent lieu à une courbure Φ et à une dilatation ϵ_1 à la fibre inférieure, à une dilatation ϵ_2 à la fibre supérieure et ϵ_c à l'axe central.

Les relations de base à cet égard sont identifiées à l'aide de la Figure 2. La prémisses fondamentale est qu'une section plane va demeurer plane tout au long de sa sollicitation. Cette prémisses permet de constituer les relations suivantes entre les valeurs Φ , ϵ_1 , ϵ_2 , ϵ_c , ϵ_x (la dilatation à une distance h_x de la fibre inférieure) et la hauteur d (ou h) de la section :

$$\Phi = (\epsilon_2 - \epsilon_1)/d \quad (\text{Éqn. 5a})$$

$$\epsilon_c = (\epsilon_2 + \epsilon_1)/2 \quad (\text{Éqn. 5b})$$

$$\epsilon_x = \epsilon_1 + \Phi h_x \quad (\text{Éqn. 5c})$$

Tel que proposé par McGuire [4], si l'on néglige pour l'instant les contraintes résiduelles, il est facile de relier le paramètre qh (la profondeur de plastification au travers de la section, mesurée à partir de la fibre supérieure) à la limite élastique du matériel σ_y , à la courbure ϕ et à la contrainte élastique σ_1 au niveau de la fibre inférieure de la section comme suit :

$$\phi = \frac{\sigma_y - \sigma_1}{E (h - qh)} \quad (\text{Éqn. 6})$$

En imposant σ_1 et en considérant que la fibre inférieure demeure élastique (i.e. $\epsilon_1 = \sigma_1/E$), il est possible d'établir les dilatations et les contraintes à toutes les positions h_x de la section. Il est possible ensuite de procéder à l'intégration de ces contraintes sur l'ensemble de la membrure pour calculer une valeur de P et de M . Les graphiques présentés à la Figure 3 ont été générés par la méthode décrite ci-haut pour un profilé 8WF x 31 ($F_y = 33$ ksi) selon l'axe fort, en utilisant cependant, une segmentation de la section, selon la procédure décrite à la section 5.1 de la présente et aussi en tenant compte des contraintes résiduelles.

Évidemment, au fur et à mesure que le niveau de pénétration de la plastification augmentera au travers de la section, la rigidité de la section diminuera, ainsi que la charge nécessaire pour initier

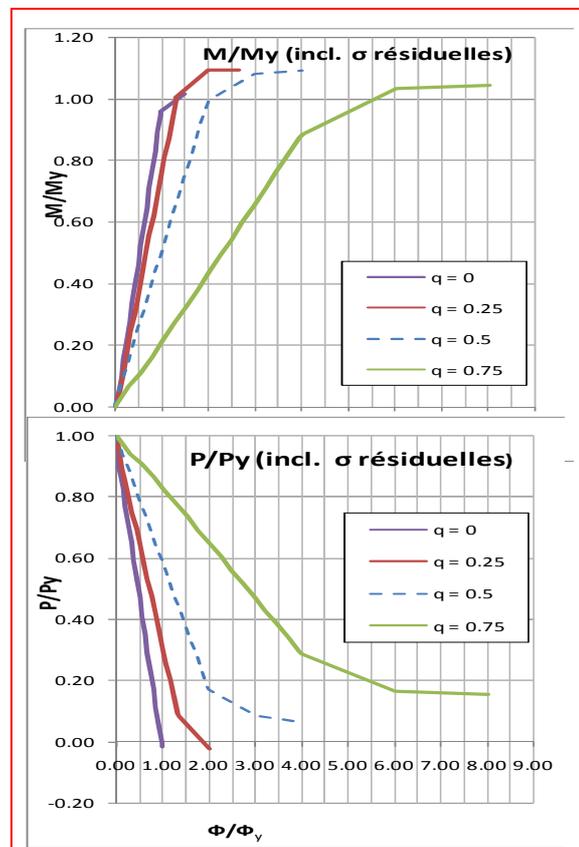


Figure 3 – Relation P, M et Φ
(8 WF x 31, $F_y = 33$ ksi)

l'instabilité de la colonne car en effet, seules les zones non plastifiées de la section peuvent être mobilisées afin de contribuer à la rigidité du système.

3. Paramètres affectant la résistance en compression (membrure renforcée / non-renforcée)

Les paramètres affectant la résistance en compression d'une membrure en acier non-renforcée sont bien exposés dans la littérature scientifique, notamment par Beaulieu, Picard et collab. [5]. Les principaux paramètres sont :

- l'élanement (kl/r);
- les défauts de rectitude à savoir les imperfections initiales;
- les contraintes résiduelles qui découlent des méthodes de fabrication de la pièce;
- la limite élastique du matériel (pour les colonnes trapues et celles de longueur intermédiaires);
- le potentiel d'instabilité locale des plaques et parois;
- la forme de la section et en particulier les formes pouvant mener à un flambage en mode torsion (ex. en forme de crucifix) ou en mode flexion-torsion;
- les déformations en cisaillement de l'âme, généralement associées aux âmes ajourées ou constituées d'étrésillons ou de plaques de liaisons.

La Figure 2-10 de la 3^e édition du « Handbook of Steel Construction » de l'Institut canadien de la construction en acier [6] illustre bien l'influence de quelques-uns des paramètres cités ci-dessus.

Dans le cas d'une colonne renforcée, les paramètres complémentaires qui peuvent avoir un impact sur le mode de rupture d'une membrure renforcée et sollicitée en compression sont :

- le niveau du préchargement (i.e. la charge initiale P_i);
- le positionnement relatif des plaques de renfort, plus précisément le rapport r_n / r_o où:

$$r_o = \sqrt{\frac{I_o \text{ xx ou yy}}{A_o}} \text{ et } I_o = \text{inertie de la section originale et } r_o \text{ son rayon de giration}$$

$$r_n = \sqrt{\frac{I_n \text{ xx ou yy}}{A_n}} \text{ et } I_n = \text{inertie des nouvelles pièces ajoutées et } r_n \text{ le rayon de giration de ces nouvelles pièces ajoutées (} A_o \text{ et } A_n = \text{aire section originale et ajoutée respectivement);}$$

- la déviation dans l'alignement de la membrure originale (déformée plus le défaut de rectitude initiale), incluant l'amplification de cette déviation sous les effets de la charge initiale au moment de la pose des nouvelles pièces d'acier;
- les nuances d'acier des nouvelles plaques, voire la création d'une section hybride;
- les contraintes résiduelles, qu'elles soient défavorables ou plutôt favorables lorsque présentes dans les plaques de renfort;

- le niveau de plastification requise et tolérable dans les plaques originales afin de mobiliser les efforts dans les nouvelles plaques.

Les élaborations et les exemples qui suivent permettront de mettre en évidence l'importance relative de plusieurs de ces paramètres.

4. Renforcement en compression – la norme et la problématique

L'équation de base de la norme CAN/CSA S6-06, applicable à une membrure assemblée d'une seule nuance d'acier est donnée par la formule :

$$C_r = \Phi A F_y (1 + \lambda^{2n})^{-1/n} \quad (\text{Éqn. 7})$$

$$\text{où } \lambda = \frac{kL}{r} \sqrt{\frac{F_y}{\pi^2 E}} \text{ et } n = 1,34 \text{ ou } 2,24 \text{ généralement (dans certains cas, } n = 1)$$

Pour tenir compte notamment de l'influence des méthodes de fabrication et des contraintes résiduelles, la norme prévoit deux valeurs de base de n correspondant à deux courbes de comportement en compression. Dans tous les exemples ci-après, une valeur de n égale à 1,34 a été retenue, cette valeur étant applicable selon S6-06 aux profilés en W laminés à chaud, aux profilés assemblés, aux HSS catégorie C et aux profilés en H soudés, dont les bords des semelles ne sont pas coupés au chalumeau (i.e. plaques laminées).

À première vue, on pourrait être porté à croire que la partie de l'Équation 7 qui se trouve entre parenthèses pourrait cibler les caractéristiques portant sur l'instabilité, alors que la partie hors parenthèses ciblerait la résistance d'une section trapue. Dans les faits, les équations du code ne sont que des courbes moyennes tracées pour représenter le plus justement possible les résultats découlant de plusieurs simulations numériques (par une procédure comparable à celle décrite à la section 5 ci-après), en utilisant un programme d'ordinateur spécialement conçu et en considérant une déviation initiale de 0,001L. Les résultats de ces simulations ont été regroupés en familles de courbes de colonnes, suivant la caractérisation des contraintes résiduelles et suite à un processus de calibration des modèles à partir d'essais en laboratoire.

Ayant peu ou pas d'information dans le code visant les procédures à suivre dans le cas d'une colonne renforcée, plusieurs ingénieurs praticiens seront portés à essayer d'appliquer ou d'adapter (à tort ou à raison) l'équation de base de la norme (i.e. l'adaptation de l'Équation 7).

À première vue, les trois méthodes qui semblent les plus appropriées (Méthode 1, Méthode 2 et Méthode 3) et qui ont également été envisagées par Shek et Bartlett [2] sont les suivantes :

Méthode 1

- négliger les effets de la charge initiale;
- utiliser les propriétés géométriques correspondant à l'ensemble des éléments (profilés originaux, plaques de renfort, etc.) sans distinction quant à leur origine;
- utiliser la nuance de l'acier la plus faible.

Cette méthode prend la forme de l'équation suivante :

$$C_r = \Phi A_{[o+n]} F_{y0} (1 + \lambda^{2n})^{-1/n} \quad (\text{Éqn. 8})$$

où la valeur de λ est calculée avec la section composite et $F_y = F_{y0}$.

Cette méthode retient de manière conservatrice la nuance de l'acier la plus faible. Toutefois elle ne tient pas compte du niveau de contraintes dans les pièces originales et du risque d'une perte de rigidité prématurée de la section originale qui pourrait découler d'une plastification des plaques originales selon la disposition des nouvelles plaques de renfort.

Méthode 2

- négliger les effets de la charge initiale;
- conserver l'aire des pièces et les nuances respectives des matériaux dans la première partie de l'équation;
- utiliser les propriétés géométriques correspondant à l'ensemble des pièces sans distinction quant à leur origine;
- utiliser la nuance de l'acier la plus faible dans la deuxième partie de l'équation pour le calcul de λ .

Ces hypothèses mènent à l'expression suivante :

$$C_r = \Phi [(A_o F_{y0} + A_n F_{yn}) (1 + \lambda^{2n})^{-1/n}] \quad (\text{Éqn. 9})$$

Cette méthode a le potentiel de pouvoir évaluer de façon plus juste la résistance de membrures trapues, toutefois, comme il sera démontré ci-après, dans certaines configurations, cette méthode est **non-sécuritaire et ne doit pas être retenue.**

Méthode 3

- considérer la colonne renforcée comme un regroupement de deux membrures indépendantes, celles-ci ayant chacune ses propres propriétés géométriques et mécaniques et ses propres caractéristiques au niveau de l'élanement et de la valeur λ , et celles-ci contribuant chacune d'elle à différents niveaux à la résistance totale de la section selon la formule suivante :

$$C_r = \Phi [A_o F_{y0} (1 + \lambda_o^{2n})^{-1/n} + A_n F_{yn} (1 + \lambda_n^{2n})^{-1/n}] \quad (\text{Éqn. 10})$$

Cette méthode possède l'avantage de bien refléter le gain en résistance découlant de l'utilisation d'une nuance d'acier de résistance supérieure et de l'importance de bien disposer les nouvelles plaques. La validité de cette méthode sera examinée dans les textes ci-dessous.

5. Modélisation numérique

Deux modèles numériques (la première méthode désignée G pour générale et la seconde S pour simplifiée) sont présentés afin de permettre l'évaluation de la résistance en compression d'une membrure hybride avec ou sans renfort. Dans les deux cas, les modèles sont fondés sur la prémisse de base voulant qu'une section plane demeure plane tout au long de sa sollicitation, y compris après l'ajout de quelconque pièce de renfort.

5.1 Segmentation

Pour les deux modèles, l'analyse débute par une segmentation de la section (voir Figure 4).

Cette segmentation consiste à subdiviser une section de la membrure en un nombre d'éléments regroupant chacun les propriétés géométriques et mécaniques et en intégrant les informations relatives aux dilatations et contraintes pour une petite portion de ladite membrure, ceci afin de procéder à une intégration numérique sur l'ensemble de la section de manière à calculer P et M.

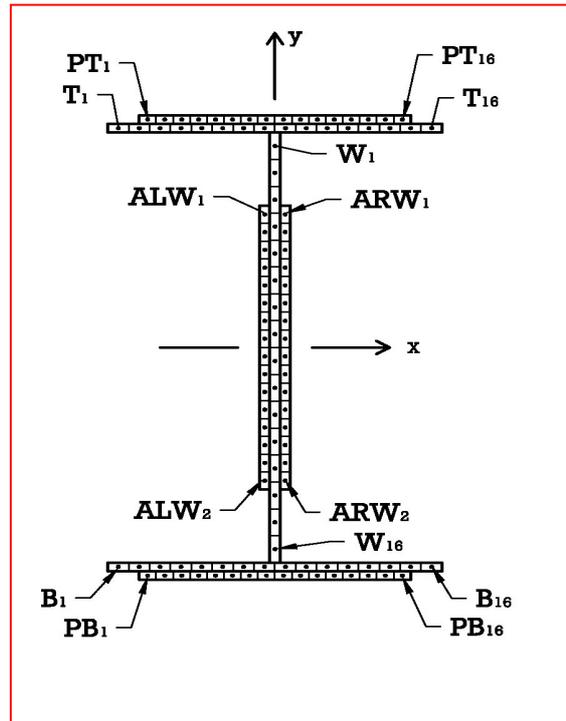


Figure 4 – Segmentation d'une section de la membrure

Chaque segment, c'est-à-dire T_1 à T_{16} , B_1 à B_{16} , W_1 à W_{16} , PT_1 à PT_{16} , etc. sera doté ponctuellement des propriétés géométriques A , x , y (en permettant de négliger les propriétés I_{xx} et I_{yy} inhérentes à chaque élément en raison du grand nombre d'éléments utilisés) ainsi que des informations suivantes relatives à l'état des dilatations et des contraintes :

σ_{reso} = contrainte résiduelle (dans les pièces originales)

ϵ_{reso} = dilatation résiduelle (σ_{reso}/E)

ϵ_{imp} = dilatation imposée aux pièces originales dues aux efforts P et M

ϵ_{emp} = dilatation emprisonnée dans les pièces originales

σ_{resN} = contrainte résiduelle le cas échéant dans les nouvelles pièces

ϵ_{resN} = dilatation résiduelle le cas échéant dans les nouvelles pièces

ϵ_{impN} = dilatation imposée dans les nouvelles pièces = $(\epsilon_{1 imp} - \epsilon_{1 emp}) + h_x (\Phi_{imp} - \Phi_{emp})$

Φ_{imp} = courbure imposée aux pièces originales

Φ_{emp} = courbure emprisonnée au moment de l'ajout des nouvelles pièces

σ_o = contrainte dans les plaques originales = $(\epsilon_{reso} + \epsilon_{imp}) \times E$ ou F_{yo}

σ_N = contrainte dans les nouvelles pièces = $(\epsilon_{impN} + \epsilon_{resN}) \times E$ ou F_{yN}

En référant à la Figure 6 (dessin a) et en considérant que la colonne comporte, dans le cas d'une membrure non-renforcée, une déviation initiale Δ_{05} à mi-hauteur, pour chaque position le long de la membrure, il y aura un effort P associé à un moment M. À titre d'exemple, à la position 3, il y aura un effort P et un moment $M_3 = P \Delta_3$ et à mi-hauteur, un moment $M_5 = P \Delta_5 = P (\Delta_{05} + \delta_5)$.

Conséquemment, pour chaque position x le long de la membrure, si l'on connaît la déviation totale Δ_5 , il restera à savoir s'il existe une valeur de Φ_{imp} et ε_{imp} (à la fibre inférieure ou à mi-hauteur) de manière à ce que l'effort axial et le moment à cette position puissent être développés suivant l'intégration des contraintes pour chaque segment i, soit $\sum A_i \sigma_i = P$ et $\sum A_i \sigma_i y_i = M$.

5.2 Contraintes résiduelles

Les contraintes résiduelles découlant des méthodes de fabrication ont un impact important sur la résistance en compression de colonne, notamment pour celles de longueur intermédiaire. La notion des contraintes résiduelles est expliquée à l'aide de la Figure 5, cette figure ayant été adaptée de figures présentées par McGuire [4] et Beaulieu, Picard et collab. [5]. Dans le cas d'un profilé en W laminé à chaud, les parties de la membrure qui se refroidiront le plus rapidement suite au laminage à chaud, développeront des contraintes résiduelles en compression, alors que les parties demeurant plus chaudes vont devoir générer des contraintes en traction, afin que la somme des contraintes internes soit de valeur nulle.

La distribution caractéristique des contraintes dans un profilé en I est de forme parabolique, telle qu'illustrée à l'aide de la Figure 5 (en noir). Toutefois, la majorité des analyses analytiques portant sur la résistance en compression de colonnes en acier ont retenu une distribution de forme linéaire [voir Réf. 4, 5 et 7] de la forme identifiée à la Figure 5 (partie en couleur), avec une valeur maximale de $0,3F_y$ au bout des semelles. C'est cette forme de distribution qui a été utilisée pour les modèles proposés et les résultats présentés dans le cadre de la présente communication. De plus, en fixant la valeur maximale de la contrainte en compression à $0,3F_y$ (voir note 1) et en considérant une contrainte uniforme dans l'âme d'une valeur égale à F_w , il peut facilement être démontré que :

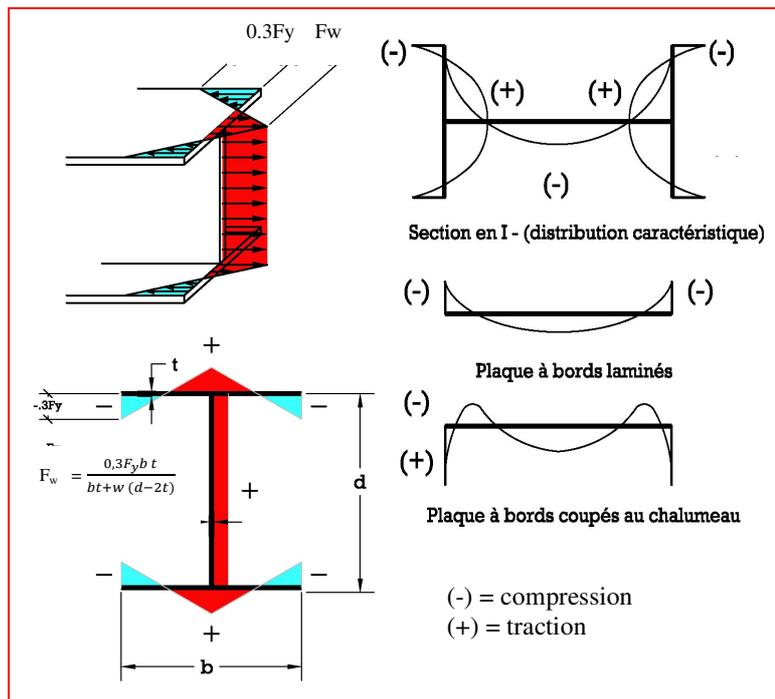


Figure 5 – Contraintes résiduelles

Note 1 : Pour les fins de la modélisation et dans le but de tenir compte de la possibilité de légères imprécisions pouvant découler de la segmentation (i.e. le choix du nombre de segments), la contrainte maximale résiduelle a été augmentée par le ratio suivant: $F_{res\ max} = 0.5b/(b/2 - b/(2 \times 16)) = 1,067 \times 0,3F_y = 0,32 F_y$ (soit au prorata de la distance du nœud d'extrémité par rapport au bord de la plaque).

$$F_w = \frac{0,3F_y b t}{bt+w(d-2t)} \quad (\text{Éqn. 11})$$

Par ailleurs, l'influence des contraintes résiduelles sur les poutres composées de type WWF est également illustrée à l'aide des résultats présentés à la Figure 8. On peut apprécier à l'aide de cette figure l'importance de la méthode de fabrication (plaques laminées vs plaques coupées au chalumeau vs plaques ayant subies un recuit de détente) sur la résistance en compression. Les plaques coupées au chalumeau comporteront des contraintes résiduelles en traction qui seront plutôt favorables par rapport aux plaques qui auront été laminées, qui elles comporteront des contraintes en compression aux extrémités de la plaque qui seront défavorables.

Pour les modèles et résultats présentés ci-dessous, des contraintes résiduelles neutres ont été considérées pour les plaques de renfort. Si toutefois des contraintes résiduelles en compression sont à considérer, l'analyse pourrait être facilement adaptée en remplaçant F_{yn} par une valeur réduite de façon à ce que $F_{yn \text{ eff}} = F_{yn} - \sigma_{resN}$.

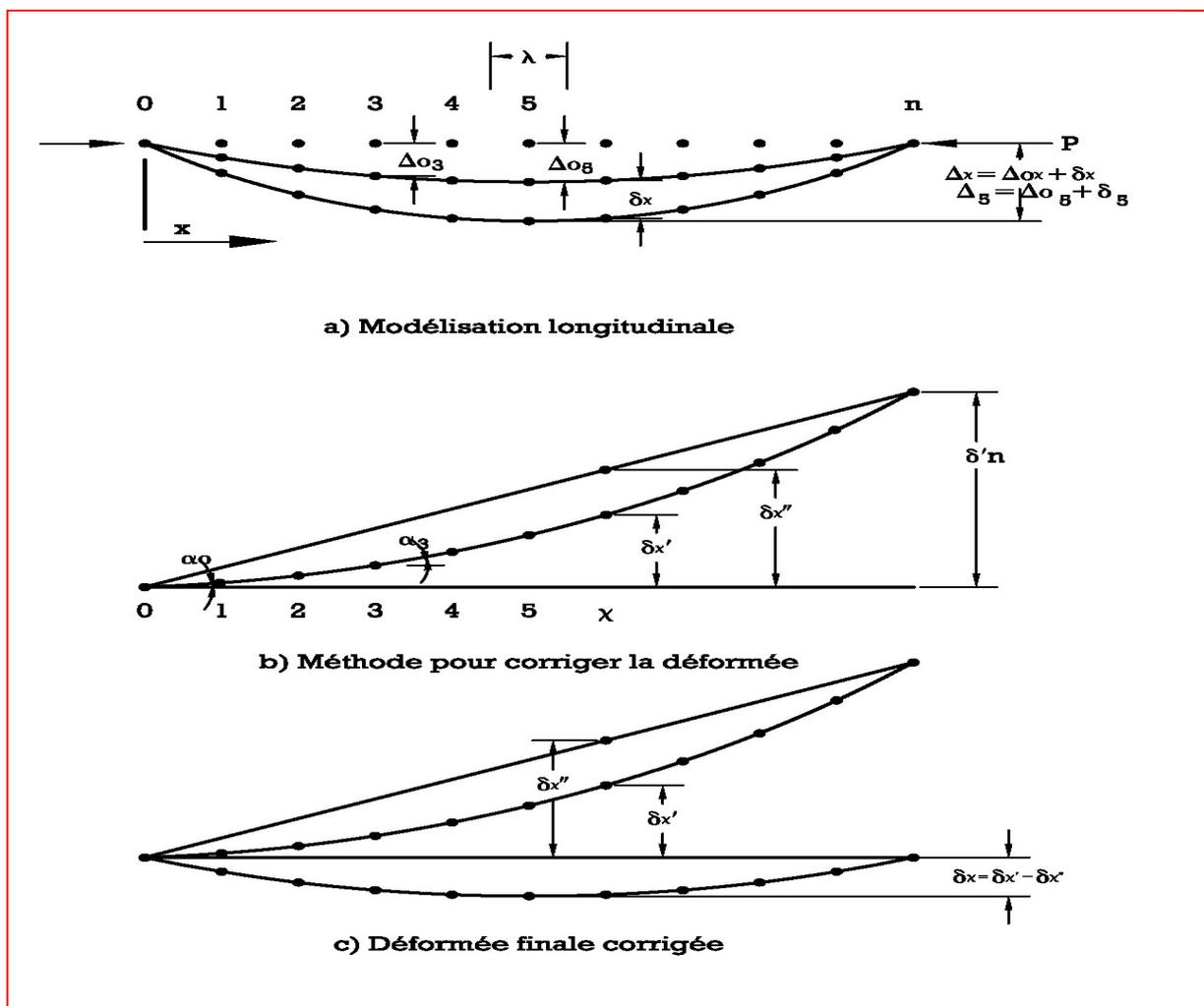


Figure 6 – Modèle à nœuds multiples

5.3 Déformée le long de la membrure

Le modèle à ressort présenté à la section 2 a permis de démontrer que dans le domaine élastique, la déviation totale à mi-hauteur peut être obtenue par le biais de la formule $\Delta_F = \Delta_o / (1 - P/P_{cr})$. Toutefois, dans le cas où une partie de la section se trouve dans le domaine élastique et l'autre dans le domaine plastique (domaine élasto-plastique), cela en raison de l'interaction entre les efforts P et M, des contraintes résiduelles et suite à une modification de la section découlant de l'ajout de plaques, une méthode devra être identifiée afin de déterminer la déviation totale finale à chacun des points 1 à n identifiée à la Figure 6.

La méthode décrite ci-après est calquée de la méthode développée par Newmark qui est également décrite en plus amples détails dans la référence « Steel Structures » par son auteur McGuire [4]. La méthode consiste d'abord à subdiviser la membrure dans l'axe longitudinal en segments de longueur λ ($\lambda = L/n$ où n = le nombre total de segments). Il s'agit en effet de représenter la membrure déformée par un système équivalent à une chaîne où tous les changements d'angles et les déplacements sont concentrés ponctuellement aux nœuds (cette approche est comparable à l'analogie du système à ressort présenté à la section 2).

À chaque nœud, identifié de 0 à n, il est donc possible de calculer ou d'effectuer dans un premier temps une estimation des valeurs de Φ_x , M_x et Δ_{ox} , comme suit :

- $M_x = P \Delta_x$;
- $\Phi_x = P \Delta_x / EI$ si dans le domaine élastique, ou sinon, la valeur doit être trouvée par un processus d'itérations par essais et erreurs en intégrant les contraintes selon la méthode identifiée précédemment pour satisfaire aux valeurs de P et M agissant sur la section;
- $\alpha_x =$ changement ponctuel de l'angle de rotation = $\Phi_x \lambda$;
- $\theta' =$ la pente non corrigée entre deux nœuds;
- $\delta'_x =$ la déformée non corrigée au nœud à la position x (voir Fig. 6, dessin b);
- $\delta''_x =$ la correction à appliquer au nœud à la position x;
- $\delta_x =$ la déformée corrigée à la position x;
- $\Delta_x =$ la déviation totale du nœud à la position x qui sera égale à $\delta_x + \Delta_{ox}$.

Pour débiter le processus, il faut d'abord proposer une valeur estimative initiale pour Δ_x . Pour une colonne ayant une déviation initiale Δ_o à mi-hauteur, il convient de retenir une forme sinusoïdale de sorte que : $\Delta_x = \frac{1}{(1 - \frac{P}{P_{cr}})} \Delta_o \sin\left(\frac{x}{L} \pi\right)$

Tel que fait par McGuire et en se référant à la Figure 6 (dessins b et c), il peut être démontré que la déformée non corrigée sera égale à :

$$\delta'_x = \delta'_{x-1} + (\alpha_0 + \alpha_1 \dots \alpha_{n-1}) \lambda \text{ et à l'extrémité droite de la membrure où } x = n$$

$$\delta'_n = \delta'_{n-1} + \lambda \sum_{x=0}^{x=n-1} \alpha_x \text{ ou si } n=10, \delta'_{10} = \delta'_9 + \lambda \sum_{x=0}^{x=9} \alpha_x$$

Puisque dans le cas qui nous concerne, le nœud à l'extrémité droite, doit être au même niveau que celui à l'extrémité gauche, la véritable déformée à quelconque position peut être obtenue en soustrayant une valeur égale à $\delta_x'' = x/n \delta_1'$. À titre d'exemple, si $n = 10$ et que l'on souhaite déterminer la déformée réelle à la position $x = 3$, la correction à appliquer est : $\delta_3'' = 3/10 \delta_1'$ (i.e. en d'autres termes, au nœud 3, il convient de soustraire une valeur de 3/10 de la déformée non corrigée qui aura été calculée pour le nœud 10).

5.4 Modèle et méthode de calcul numérique simplifiée

La méthode simplifiée proposée dans la présente consiste à simplifier le problème en diminuant le nombre de nœuds au minimum, soit au nombre de 3, tel que présenté à Figure 7.

En appliquant la méthode décrite ci-dessus, nous obtenons :

au nœud 0, $M_0 = 0$, alors $\Phi_0 = 0$;

au nœud 1, $M_1 = P\delta_1$ alors $\Phi_1 = P\delta_1/EI$ (si dans le domaine élastique) sinon $\Phi_1 = \Delta\theta/\lambda = 8\delta_1/L^2$

au nœud 2, $M_2 = 0$, alors $\Phi_2 = 0$;

aux nœuds 0 et 2, le changement d'angle ponctuel est égal à 0 car $M_0 = M_2 = 0$;

au nœud 1, le changement d'angle ponctuel = $\Phi_1\lambda$ dans tous les cas et $(P\delta_1/EI)\lambda$ (si dans le domaine élastique).

Entre le nœud 0 et 1, comme le changement d'angle ponctuel au nœud 0 est nul, la pente non corrigée entre ces deux nœuds doit alors être égale à 0. Entre le nœud 1 et 2, la pente non corrigée est égale à la pente entre 0 et 1 (soit nulle) plus le changement ponctuel de l'angle au nœud 1 correspondant à $\Phi_1\lambda$. Au nœud 2, la déformée non corrigée est égale à la déformée au nœud 1 (soit égale à zéro) plus la pente non corrigée entre les nœuds 1 et 2 multipliés par λ , ce qui donne :

$$\delta_2' = \Phi_1\lambda^2 = \frac{P\delta_1}{EI} \lambda^2$$

Toutefois, comme la véritable déformée au nœud 2 doit être égale à zéro, on doit alors soustraire une valeur équivalente à cette dernière valeur du nœud 2, de même que la moitié de cette valeur du nœud 1 pour en arriver au résultat suivant :

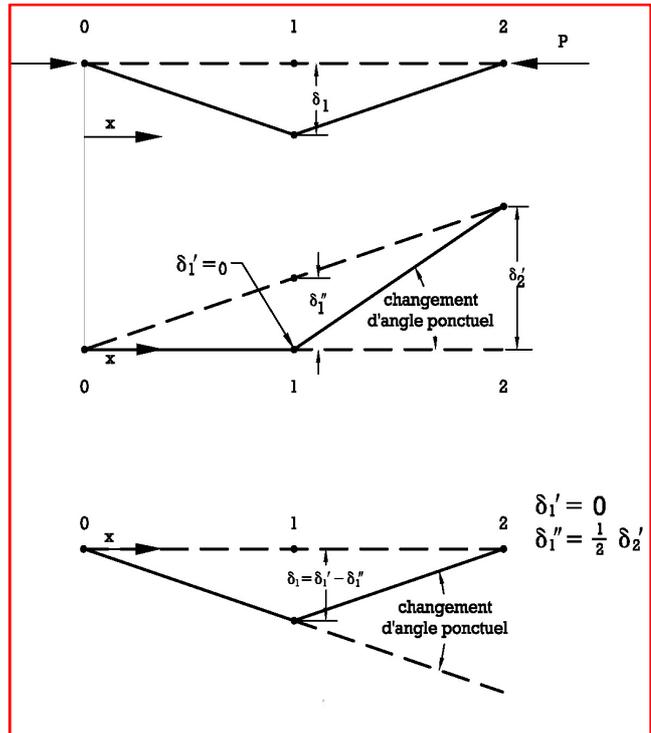


Figure 7 – Modèle simplifié à 3 nœuds

$$\delta_1 = 0 - \frac{1}{2} \frac{P \delta_1}{EI} \lambda^2 = - \frac{1}{2} \frac{P \delta_1}{EI} \left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{-P \delta_1 L^2}{8EI} \text{ ou en valeur absolue } \delta_1 = \frac{P \delta_1 L^2}{8EI}$$

Alors que si $\delta_1 \neq 0$, on obtient $P = P_{cr} = \frac{8 EI}{L^2}$

Il convient de noter que la valeur de $\frac{8 EI}{L^2}$ correspond à la valeur de la charge critique pour ce système et que si l'on compare cette valeur à la valeur d'Euler, on peut conclure que le modèle est conservateur. Afin d'apporter une légère correction au modèle, il suffit de corriger la valeur de L, comme suit :

$$L_{eff} = \sqrt{\frac{8}{\pi^2}} \text{ ou } L_{eff} = 0,900 L \quad (\text{Éqn. 12})$$

Outre la simplification découlant d'une diminution du nombre de nœuds et de positions à traiter le long de la membrure, un des principaux avantages du modèle simplifié réside dans le fait qu'il est maintenant possible d'établir une relation directe entre la déformée maximale au nœud central et la courbure au même endroit (i.e. entre δ_1 et Φ_1) et ce, autant dans le domaine élastique que dans le domaine élasto-plastique en appliquant la formule suivante :

$$\Phi_1 = 8\delta_1 / (L_{eff})^2 \quad (\text{Éqn. 13})$$

6. Résultats et discussions

Les techniques de modélisations décrites ci-haut sont appliquées à l'évaluation de la résistance en compression autour de l'axe faible (y-y) d'une membrure composée de type WWF 600 x 680 et fabriquée à partir d'un acier de nuance 250 MPa. Les propriétés géométriques de cette section sont identifiées dans le « Handbook of Steel Construction » [6].

Les analyses portent dans un premier temps sur une membrure non-renforcée et dans un deuxième temps sur l'évaluation de cette même membrure suite à son renforcement selon deux scénarios différents, soit :

- i. l'ajout de deux plaques de 51mm x 457 mm (2 po x 18 po) et de nuance 300W aux semelles supérieures et inférieures;
- ii. l'ajout de deux plaques identiques, soit de 51mm x 457 mm (2 po x 18 po) mais cette fois sur chaque côté de l'âme.

Dans les deux cas, l'aire totale d'acier est augmentée de 53,6 % (A_n/A_o).

Les analyses ont été effectuées pour neuf longueurs différentes dans chaque cas ce qui correspond à des valeurs de λ variant de 0,2 à 1,8.

6.1 Colonne non-renforcée

Les résultats découlant de l'analyse d'une colonne non-renforcée sont présentées à la Figure 8, selon les deux types de modélisations élaborées, soit le modèle général (G) et le modèle simplifié (S) à trois nœuds.

La section WWF 600 x 680 a été retenue afin de permettre une comparaison avec les résistances calculées et publiées dans la Réf. 5 [pg. 415] pour une section très similaire (même famille), soit une section composée de type WWF 600 x 638 (identifiée comme une section américaine - WWF 24 x 428) et qui a été fabriquée par trois méthodes distinctes, soit au moyen de plaques laminées, de plaques coupées au chalumeau et finalement au moyen de plaques ayant des contraintes résiduelles réduites. Les résultats sont également comparés à la résistance donnée par la norme CAN/CSA S6-06 en utilisant une valeur de « n » égale à 1,34 et en considérant une valeur nominale égale à 1,0 pour le coefficient de tenue des matériaux (i.e. $\Phi = 1$).

Résultats (réf. Fig. 8)

Pour la plage de valeur de λ variant de 0,4 à 1,8, on retrouve une excellente concordance entre les résultats obtenus par le biais des deux techniques de modélisation proposée et ceux rapportés dans la littérature découlant de simulations numériques associées à des calibrations en laboratoire pour les méthodes de fabrication intégrant des plaques coupées au chalumeau (courbe de la Figure 8 correspondant au trait plein central). L'écart maximal dans ces cas est inférieur à 4,1 % pour le modèle G et de 5,2 % pour le modèle S.

Pour la plage de λ variant de 1,0 à 1,8, on peut constater également une excellente concordance entre les résistances calculées à partir de la norme S6-06 (avec $n = 1,34$) et entre les résultats provenant des deux modèles (G) et (S) donnant lieu à un écart maximal de 1,2 %, seulement pour le modèle G et 3,8 % pour le modèle S, ce qui est difficilement distinguable sur le graphique. Toutefois, pour la plage de λ variant de 0,4 à 0,8, on constate que les deux modèles donnent des valeurs légèrement inférieures (conservatrices) par rapport à celles obtenues par le biais de l'équation de la norme S6-06 avec $n = 1,34$. Cependant l'écart maximal de 5,4 % (Modèle S) et 3,0 % (Modèle G) demeure relativement faible et les deux modèles G et S sont conservateurs par rapport au code.

Les techniques de modélisation utilisées, bien que conservatrices, sont moins précises pour une valeur de λ égale 0,2, soit pour une section relativement trapue (i.e. pour une valeur de λ égale ou inférieure à 0,15, il convient de considérer une plastification totale de la section). Cette sous-évaluation semble découler des deux principaux facteurs suivants :

- 1) la méthode de segmentation retenue ;
- 2) l'efficacité des algorithmes de recherches développés pour isoler les valeurs maximales de P en fonction de la courbure Φ et des contraintes de dilatations ϵ à l'axe central ou à la fibre inférieure, notamment pour le modèle G.

Par ailleurs, le Tableau I ci-contre présente les résultats pour différents autres profilés en W, évalués au moyen du modèle S, selon l'axe faible avec $F_y = 33$ ksi et λ égal à 1,0.

Tableau 1 Comparaison pour profilé en W

| Section | | (1) | (2) | (1 - 2)/1 |
|----------------------------|-----------|--------------|-----------|-----------|
| | | P(kN) | P(kN) | Écart |
| (F _y = 33 ksi) | λ | Code | Modèle | |
| (F _y = 228 Mpa) | | n = 1,34 | Simplifié | |
| | | $\Phi = 1,0$ | | |
| W200 x 46 | 0.993 | 791.3 | 758.4 | 4.2% |
| W250 x 101 | 0.996 | 1736.3 | 1666.9 | 4.0% |
| W310 x 107 | 0.993 | 1834.0 | 1757.5 | 4.2% |
| W310 x 283 | 0.998 | 4859.7 | 4672.6 | 3.9% |
| W360 x 79 | 0.991 | 1351.2 | 1278.9 | 5.3% |
| W460 x 106 | 0.997 | 1817.6 | 1697.9 | 6.6% |
| W610 x 217 | 0.998 | 3751.3 | 3533.3 | 5.8% |

6.2 Colonne renforcée

Les résultats découlant de l'analyse de la même colonne (WWF 600 x 680) une fois renforcée sont présentés à la Figure 9a, dans le cas où les plaques sont ajoutées aux semelles supérieure et inférieure et à la Figure 9b lorsque les mêmes plaques sont ajoutées à l'âme. Les analyses numériques effectuées et présentées aux figures 9a et 9b ont porté sur les deux états suivants :

- 1) le renforcement de la membrure au moment où la charge initiale P_i était égale à $0,25A_oF_{yo}$;
- 2) le renforcement de la membrure lorsque la charge initiale P_i aura atteint une valeur de $0,5A_oF_{yo}$ (évidemment uniquement pour les cas de λ où la membrure n'avait pas déjà atteint sa charge maximale).

Les résultats obtenus par simulations numériques sont comparés aux trois méthodes de calcul (Méthodes 1, 2 et 3) identifiées à la section 4 de la présente.

Résultats (réf. Figures 9a et 9b)

Tel que démontré à la Figure 9a, lorsque la charge initiale est égale à 25 % de P_y , et que le renfort est positionné sur les semelles supérieure et inférieure de manière à conserver l'efficacité de la section totale n'affectant que peu le rayon de giration (i.e. dans ce cas-ci $\alpha = 0,835 \approx 1$) on constate que :

- la méthode de calcul 1 est généralement conservatrice pour l'ensemble des valeurs de λ inférieure à 0,8 mais non-conservatrice particulièrement quand λ est $> 1,2$;

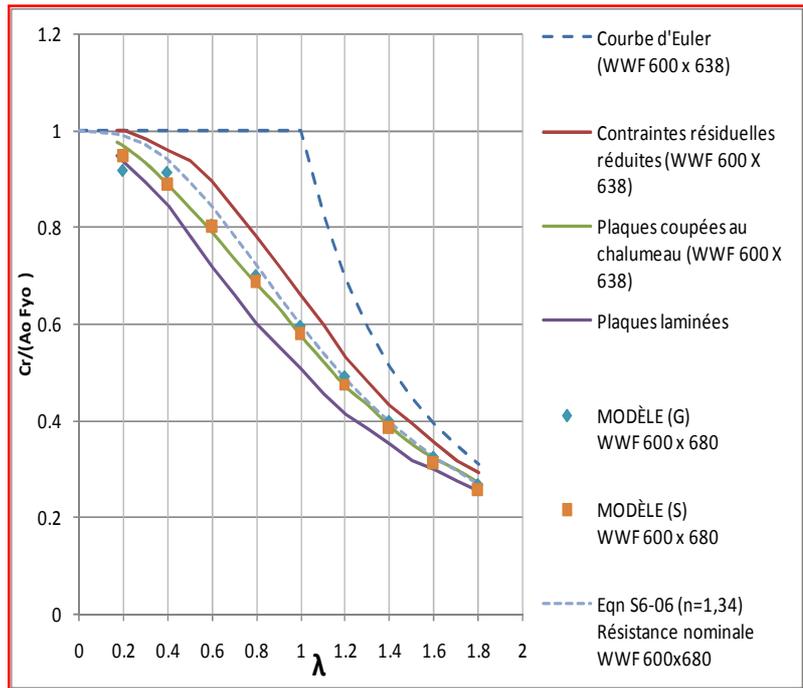


Figure 8 – Évaluation de la résistance pour la colonne non-renforcée

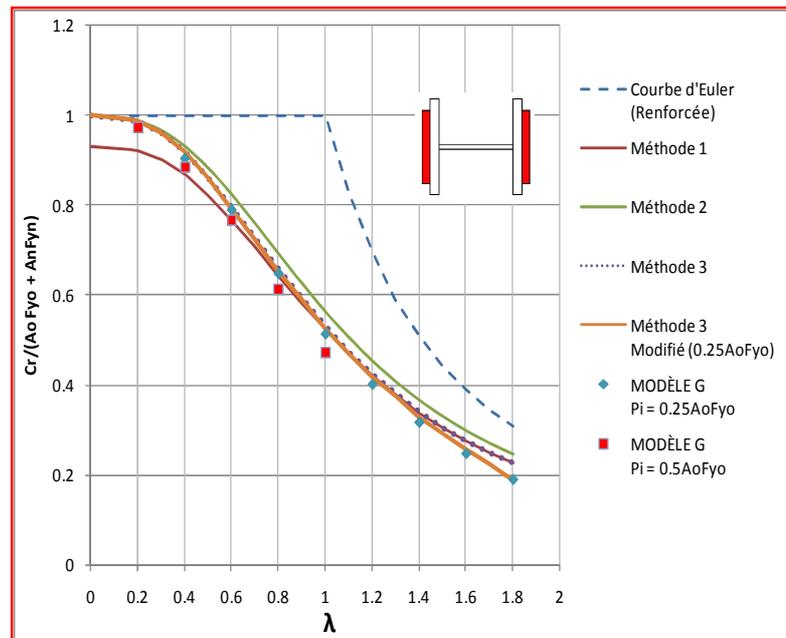


Figure 9a – Évaluation colonne renforcée – renfort semelle

- la méthode de calcul 2 donne des valeurs supérieures aux résultats découlant des simulations numériques, soit avec un écart maximal de 29,1 % lorsque $\lambda = 1,8$;
- la méthode de calcul 3 (même sans modification) donne les résultats les plus justes pour toute la plage de λ étudiée, toutefois, pour les valeurs de λ supérieures à 1,2, on constate une certaine imprécision variant de 7,8 % à 20,3 % (très similaire à l'écart généré par l'application de la méthode de calcul 1);
- lorsque la charge initiale est portée à 50 % de P_y , les méthodes de calcul 1 et 3 donnent des résultats qui sont légèrement supérieurs (i.e. non-conservateurs) par rapport à ceux obtenus par la méthode de calcul générale, représentant des écarts de 5,1 % (Méthode 1) et de 7,6 % (Méthode 3 – avant modification) lorsque λ est égal à 0,8 et des écarts de 11,2 % (Méthode 1) et 12,7 % (Méthode 3 – avant modification) lorsque λ est égal à la valeur maximale de 1,0.

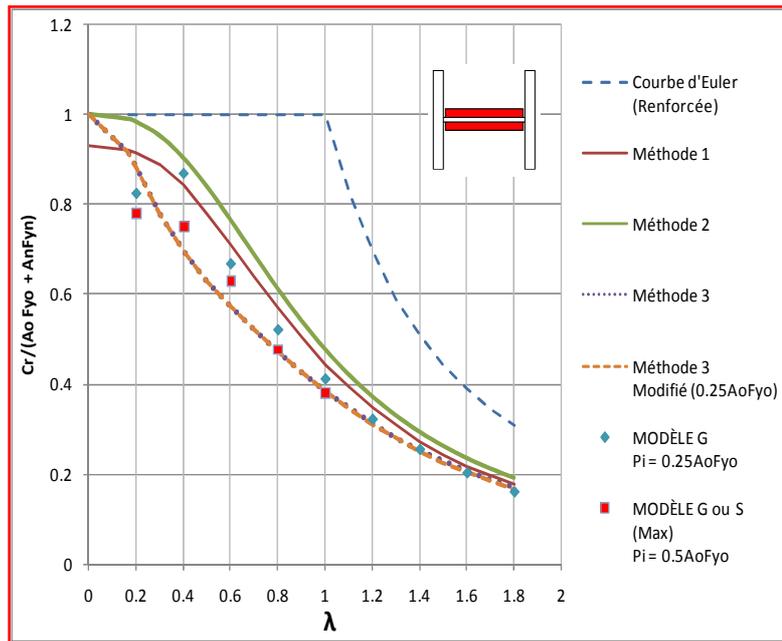


Figure 9b – Évaluation colonne renforcée – renfort âme

Lorsque les plaques de renfort sont positionnées sur l'âme de la section originale (Figure 9b) ayant pour effet de réduire considérablement le rayon de giration de la section totale (i.e. $\lambda \ll 1$) on constate que :

- de façon générale, les méthodes de calcul 1 et 2 génèrent des résultats non-conservateurs. À titre d'exemple, lorsque la charge initiale est portée à 50 % de P_y , la méthode de calcul 1 va surévaluer la résistance de 19,2 % (quand $\lambda = 0.8$) et la méthode 2 de 28,4 %.
- la méthode de calcul 3 produit des résultats qui englobent relativement bien l'ensemble des résultats générés par simulation numérique (méthode S ou G). En effet, les simulations numériques et la méthode de calcul 3 permettent de mettre en évidence que le gain en résistance provenant des nouvelles plaques est relativement faible lorsque les plaques sont mal disposées, ce qui se reflète par une faible valeur de r_n ;
- les modèles de simulations numériques, notamment la méthode G, semblent sous-évaluer (i.e. conservateur) la résistance de la section lorsque λ est égal à 0.2 (i.e. colonne relativement trapue). Toutefois, il convient de noter que pour cette valeur de λ , la section travaille à une valeur de l'ordre de 80 % de la section plastique totale. Les raisons pour cette sous-évaluation sont probablement les mêmes que celles mentionnées eu égard aux résultats identifiés dans la Figure 8 relativement à la colonne non-renforcée.

Ajustement à la méthode de calcul 3

Rappel que la méthode de calcul 3 est donnée par l'équation suivante :

$$C_r = \Phi [A_o F_{y_o} (1 + \lambda_o^{2n})^{-1/n} + A_n F_{y_n} (1 + \lambda_n^{2n})^{-1/n}] \quad (\text{Méthode 3})$$

Un ajustement à cette méthode peut être introduit pour mieux tenir compte de la présence de la charge initiale et de son influence sur les défauts de rectitudes. En effet, dans le cadre des simulations numériques, il est présumé que les pièces et/ou plaques de renfort seront installées en suivant l'alignement de la membrure originale y compris ses imperfections initiales. Or, si la membrure initiale comporte une déviation initiale égale à L/1000, soit la valeur prévue dans l'établissement de l'équation de base de la norme CAN/CSA S6-06, les pièces et/ou plaques de renfort seront disposées avec une déviation initiale supérieure à cette valeur. La Référence 5 [pg. 416] fournit un graphique identifiant l'influence des défauts de rectitude sur la résistance en compression. L'influence de ces défauts est résumée au Tableau II ci-dessous pour une déviation initiale $a_o = L/1000$ et une déviation initiale deux fois supérieures, soit avec $a_o = L/500$. Il devient alors possible de redéfinir la Méthode de calcul 3 (i.e. désignée Méthode 3 modifiée) en introduisant un nouveau paramètre k_Δ comme suit :

$$C_r = \Phi [A_o F_{y_o} (1 + \lambda_o^{2n})^{-1/n} + k_\Delta A_n F_{y_n} (1 + \lambda_n^{2n})^{-1/n}] \quad (\text{Éqn. 14}) \quad (\text{Méthode 3 modifiée})$$

$$\text{où } k_\Delta = 1 - \frac{(1 - k_{a\ 500:1000})}{\left(\frac{1}{1000}\right)} \cdot \left(\frac{\Delta_i}{L} - \frac{1}{1000}\right) \quad (\text{Éqn. 15})$$

Dans cette dernière équation, la valeur de $k_{a\ 500:1000}$ sera obtenue du Tableau II pour la valeur de λ correspondante (avant renfort) et Δ_i calculée à partir de l'Équation 3 en remplaçant Δ_o par L/1000 et P par P_i (la charge initiale au moment de l'ajout des plaques). Il convient de noter que cet ajustement ne permet pas d'englober toute influence découlant de la charge initiale, mais uniquement celle affectant la géométrie initiale de la membrure au moment de la pose des plaques de renfort.

7. Conclusions

Il a été démontré qu'il est possible de développer des modèles mathématiques permettant de reproduire, avec un bon niveau de précision, les valeurs de résistance en compression qui sont données par l'équation de base de la norme CAN/CSA S6-06 pour une colonne non-renforcée qui est dotée d'un acier unique.

Tableau II - Valeur de k_a

| λ | $a_o =$ L/1000 | $a_o =$ L/500 | Ratio K_a (L/500) (L/1000) |
|-----------|-------------------|------------------|------------------------------------|
| 0.2 | 0.953 | 0.894 | 0.938 |
| 0.3 | 0.900 | 0.841 | 0.934 |
| 0.4 | 0.835 | 0.765 | 0.916 |
| 0.5 | 0.759 | 0.682 | 0.899 |
| 0.6 | 0.682 | 0.600 | 0.880 |
| 0.7 | 0.588 | 0.529 | 0.900 |
| 0.8 | 0.517 | 0.470 | 0.909 |
| 0.9 | 0.459 | 0.412 | 0.898 |
| 1.0 | 0.412 | 0.376 | 0.913 |
| 1.1 | 0.376 | 0.355 | 0.944 |
| 1.2 | 0.335 | 0.306 | 0.913 |
| 1.3 | 0.306 | 0.276 | 0.902 |
| 1.4 | 0.282 | 0.247 | 0.876 |
| 1.5 | 0.259 | 0.224 | 0.865 |
| 1.6 | 0.235 | 0.200 | 0.851 |
| 1.7 | 0.213 | 0.178 | 0.836 |
| 1.8 | 0.200 | 0.167 | 0.835 |

Ces modèles mathématiques peuvent être utilisés pour étendre l'évaluation aux membrures en acier hybride et/ou aux membrures renforcées en présence ou non d'une charge initiale. En effet, l'une des méthodes proposées, soit la méthode simplifiée (S), peut être exploitée assez aisément

par l'ingénieur praticien, en faisant appel aux techniques proposées dans la présente communication et en ayant recours à un chiffrier de calcul électronique.

La méthode de calcul générale, quant à elle, peut être utilisée pour évaluer des cas encore plus complexes, comme le cas d'une colonne renforcée à inertie variable ou encore une colonne qui serait soumise simultanément à une charge axiale et à un moment, à une ou ses deux extrémités.

Sur la base de l'unique section étudiée, il apparaît que la Méthode de calcul 3 (avec ou sans la modification proposée par le biais de l'Équation 15) est la plus appropriée des trois méthodes proposées pour le calcul préliminaire. Cette méthode de calcul considère la colonne renforcée comme un regroupement de deux membrures indépendantes ayant chacune ses propriétés géométriques et mécaniques, ses propres caractéristiques au niveau de l'élancement et de valeur λ et contribuant chacune d'elle à différents niveaux à la résistance totale de la section. Toutefois, un plus grand nombre de cas devra être examiné au préalable avant de pouvoir statuer sur la validité générale de cette méthode, notamment quand la charge initiale serait supérieure à $0,25A_0F_{y0}$.

7. Références

1. Association canadienne de normalisation (CSA), CAN/CSA-S6-06 *Code canadien sur le calcul des ponts routiers*, CSA International, Mississauga, 2006.
2. Shek, Katherine K.W. and Bartlett, Michael F., *Analysis and Design of Rehabilitated Built-up Hybrid Steel Compression Members*, Seventh International Conference on Short and Medium Span Bridges, Montreal, Canada, 2006.
3. Shanley, F.R., *The Column Paradox*, Journal of Aerospace Science, vol. 13, no. 12, Dec. 1946.
4. McGuire, William, *Steel Structures, Structural Analysis and Design Series*, William J. Hall editor, Prentice-Hall Series in Structural Analysis and Design, 1968.
5. Beaulieu, Picard, Tremblay, Grondin et Massicotte, *Calcul des Charpentes d'acier, Tome I*, Institut canadien de la construction en acier, 2^e édition, 2006.
6. *Handbook of Steel Construction*, 8^e édition, Institut canadien de la construction en acier, Toronto, 2004.
7. Galambos, Theodore V., editor, *Guide to Stability Design of Metal Structures*, 4th edition, John Wiley & Sons, New York, 1988.