



Laboratoire Central
des Ponts et Chaussées

L'esprit de recherche au cœur des réseaux



Direction du Laboratoire
des Chaussées

Programme franco-québécois d'échange de fonctionnaires

**Mission au LCPC de Nantes dans le cadre de l'opération de recherche 11P063
« Outils avancés de calcul et de dimensionnement des structures de chaussées »**

Bilan global

Par :

Denis ST-LAURENT, ing.

Division Structures et Matériaux pour
les Infrastructures de Transport (SMIT)

Le 11 août 2008

LCPC **Etablissement Public national à caractère Scientifique et Technologique**
Paris 58 boulevard Lefebvre - 75732 Paris cedex 15
Nantes Route de Bouaye - BP 4129 - 44341 Bouguenais cedex
Marne-la-Vallée LMSGC - Cité Descartes, Parc Club de la Haute Maison
2 allée Kepler - 77420 Champs-sur-Marne
Satory LIVIC - Batiment 140 - 13 route de la Minière - Satory - 78000 Versailles
Internet www.lcpc.fr

AVANT PROPOS

J'ai préparé ce document au cours de mon séjour à la division SMIT du centre LCPC de Nantes, dans le cadre du programme franco-qubécois d'échange de fonctionnaires. Je tiens à remercier tout le personnel de la division SMIT pour leur esprit de collaboration ainsi que pour leur accueil chaleureux et leur aide amicale. Merci à Pierre Hornych pour l'accueil et l'aide qu'il a assurée dès mon premier appel téléphonique, et à Jean-Michel Piau pour les enseignements qu'il m'a transmis généreusement. Mon séjour serait aussi nettement moins riche sans le précieux concours que j'ai reçu de Jean-Maurice Balay, Didier Bodin, Armelle Chabot, Ferhat Hammoum et Emmanuel Chailleux. Merci aussi à Chantal de La Roche pour son support et sa confiance, ainsi qu'à tout le personnel de la division, thésards et chercheurs de passage qui contribuent à la cohésion d'ensemble et au maintien d'une belle ambiance de travail.

Je n'oublie pas aussi les intervenants du Ministère des Transports du Québec qui m'ont donné la chance de vivre cet échange, enrichissant pour moi et ma famille. Je remercie en particulier Anne-Marie Leclerc, Claude Tremblay, Guy Tremblay et Guy Bergeron qui m'ont accordé leur confiance et les dispositions nécessaires à la réalisation de ce projet.

Il ne fait aucun doute pour moi que cette expérience exceptionnelle ait été positivement enrichissante. Moi et ma famille avons été très bien accueillis partout où nous sommes allés, et nous avons grandement apprécié notre séjour en France. Assurément, nous venons de vivre une année inoubliable.

TABLE DES MATIÈRES

1.0 Introduction	2
2.0 Sujets d'activité et produits livrables	2
2.1 Observations diverses liées à la méthode de dimensionnement Française	3
2.2 Synthèse des outils de dimensionnement de la division SMIT	4
2.3 Cahier de développement pour qualifier le module CVCR dans la version expert de CESAR-CVCR.....	5
2.4 Modélisation viscoélastique avec cisaillement de surface	5
2.5 Simulations non linéaires avec CVCR.....	6
2.6 Modélisation de l'orniérage des chaussées avec le module ORNI de la version recherche de CESAR-LCPC	6
2.7 Cisaillements de surface dans un modèle multicouche élastique.....	7
3.0 Conclusions	7

ANNEXE 1 : Notes sur la méthode française de conception et dimensionnement des
chaussées

ANNEXE 2 : Système multicouche élastique soumis à une charge à composantes verticales et
horizontales

1.0 Introduction

Ce bilan résume les activités réalisées au cours de mon affectation à la Division Structures et Matériaux pour les Infrastructures de Transport (SMIT) du centre de Nantes. Il s'agit d'une mission réalisée de août 2007 à août 2008 dans le cadre du programme franco-québécois d'échange de fonctionnaires. Elle est en lien avec l'opération de recherche du LCPC n°11P063 intitulée « Outils avancés de calcul et de dimensionnement des structures de chaussées ».

2.0 Sujets d'activité et produits livrables

Une première synthèse a été transmise le 31 janvier 2008. Les activités réalisées sont énumérées et décrites dans les sections qui suivent. Au final, les livrables produits durant l'année sont rédigés séparément. On s'y référera à l'aide de la numérotation suivante.

[1] St-Laurent, Denis (2008) « *Synthèse des outils de modélisation de chaussées actuellement disponibles au LCPC* », Opération de recherche 11P063 « Outils avancés de calcul et de dimensionnement des structures de chaussées », Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, France, juin 2008.

[2] Nguyen, V.T., P. Hornych, D. Bodin, J.-M. Piau et D. St-Laurent (2008) « *CESAR-LCPC version recherche, le module CVCR* », Cahier de développement pour la version expert, Opération de recherche 11P063, Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, France, juillet 2008.

[3] Hornych, P., J.-M. Piau, D. Bodin et D. St Laurent (2008) « *CVCR – a finite element program for modelling of pavements under moving wheel loads* » article préparé pour publication dans une revue internationale.

[4] St-Laurent, D., Hammoum, F., A. Chabot et H. Chollet (2008) « *Stress path in a viscoelastic pavement under braking or accelerating forces* » article en cours de rédaction pour publication dans une revue internationale.

[5] St-Laurent, D. (2008) « *Utilitaire de post-traitement pour VISCOROUTE. Manuel d'utilisation.* », Opération de recherche 11P063, Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, France, juillet 2008.

[6] St-Laurent, D. (2008) « *Modélisation non linéaire du comportement mécanique des chaussées avec le module CVCR de CESAR-LCPC* », Opération de recherche 11P063, Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, France, juillet 2008.

[7] St-Laurent, D. (2008) « *Simulations avec le module ORNI du progiciel CESAR-LCPC version recherche* », Opération de recherche 11P063, Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, France, août 2008.

Un prototype de modèle multicouche élastique a aussi été écrit en annexe.

2.1 Observations diverses liées à la méthode de dimensionnement Française

La familiarisation avec la méthode Française de dimensionnement a constitué une des premières activités entreprise en début de mission. Il s'agissait d'assimiler la méthode de dimensionnement Française (Guides, catalogue, logiciel ALIZÉ), apprendre à l'utiliser, comparer la justesse de ses résultats en parallèle avec des données du manège de fatigue, et réfléchir sur ses forces, faiblesses et pistes d'améliorations.

Les français ont sans doute été les premiers à intégrer l'approche mécaniste (Guide de 1977) qui inspire présentement l'AASHTO et plusieurs agences routières. Ils ont aussi intégré dès 1994 la notion de risque statistique dans les calculs de dimensionnement en fatigue. Les principaux intervenants du LCPC ont dans l'ensemble beaucoup de recul dans le domaine et savent bien eux même où se situent les points à améliorer. L'élaboration du logiciel ALIZÉ est à la base de l'état de l'art dans le domaine des chaussées routières et aéroportuaires. Le découpage des calculs par saison est moins important en France qu'au Québec étant donné la clémence de l'hiver, mais il n'est pas négligé dans les développements actuels (version aéronautique).

Une formation qualifiante d'une semaine a été suivie à Tour. Les formateurs étaient Hugues Odéon, Rolf Kobish, Emmanuel Delaval et Jérôme Cotard. Cette formation fournit tous les renseignements requis pour mettre cette méthode de dimensionnement en application. Les diaporamas de la formation sont conservés en référence. Quelques notes et observations générales sont reportées dans l'annexe 1.

La Figure 1 montre quelques résultats issus d'une évaluation de la méthode de dimensionnement actuelle par comparaison avec des essais Manège (expériences B0, B1, A2, C1, C2, C8 et C9). Les données sur cette figure sont issues des analyses de Deloffre (2007)¹, et indiquent le nombre de passages réel et théorique pour atteindre 15 mm de profondeur d'ornièrre. Les bandes d'erreurs ont été tracées pour illustrer la position d'un écart de durée de vie d'un facteur 2, ce qui correspond à une erreur d'environ $\pm 2,5$ cm sur l'épaisseur d'enrobé bitumineux requis pour l'atteinte du seuil d'ornièrage. Le graphe de droite a été calculé après calage des modules sur des mesures de déflexion et de rayon de courbure. Il a été observé que les prévisions de la méthode de dimensionnement sont sensiblement plus justes si l'on utilise des paramètres matériaux représentatifs du comportement de la vraie structure (notamment les modules réversibles). Beaucoup de facteurs tels que les aléas du chantier interviennent sur la précision obtenue, d'où l'intérêt d'une approche de dimensionnement probabiliste. L'étude de Deloffre montre aussi une corrélation importante entre les précipitations et l'apparition de dommages sur le revêtement. L'effet de l'eau semble aller au delà des questions de drainage en agissant aussi sur l'intégrité du mélange bitumineux lui même.

¹ Deloffre, Lydie (2007) « *Évaluation de la méthode française de dimensionnement des chaussées. Comparaison avec le comportement de chaussées expérimentales. Étude des chaussées à faible trafic, à assises en grave non traitée* » rapport de stage ENTPE, École Nationale des Travaux Publics de l'État (ENTPE), France, 103 pages.

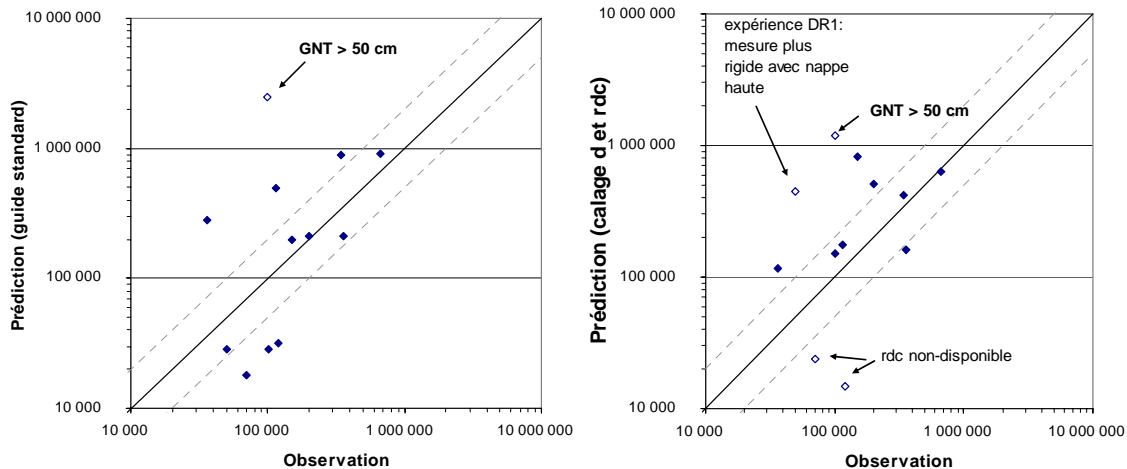


Figure 1 : Comparaison entre la performance de sections Manège et les prévisions de la méthode Française de dimensionnement des chaussées de 1994.

Il est intéressant de noter que la pratique française prévoit l'utilisation d'appels d'offre avec variantes de dimensionnement, afin de favoriser la concurrence, innovation et chute de prix. Cela pourrait être une voie à explorer au MTQ.

Il a été possible de voir la fabrication et instrumentation de planches d'essais sur un des anneaux du Manège. Plus de 90 capteurs divers ont été installés dans la chaussée. Une nouvelle expérimentation par fibres optique a aussi expérimentée : il s'agissait de fil pour ultérieurement traiter le signal de façon à retrouver les déformations s'y produisant en tout point avec une précision de 10 micromètres. Ces fils n'ont pas bien résisté à la chaleur de l'enrobé à chaud, mais il faut noter que l'enrobé était plus chaud que la normale au moment de la pose.

Une carrière de granulats, une centrale d'enrobage (tambour de fabrication continue à chaud) ainsi qu'un chantier de pose d'enrobé autoroutier ont été visités en février à Cholet près d'Angers. Cette visite a été guidé par Serge-Léon Girard, chargé d'étude et Smail Hamlat, spécialiste en adhérence au LRPC d'Angers. Il y a aussi eu visite d'un chantier expérimental de grave émulsion (GE) sur la route RD44 (PR23) près de Rennes (Le Bois-Martin) le 3 juillet avec plusieurs collègues de la division SMIT. Le site de Rennes a été très abondamment contrôlé et instrumenté pendant cette visite.

Il y a eu aussi le congrès international EATA qui s'est tenu en avril à Lyon, ainsi que plusieurs séminaires techniques et réunion internes qui se sont avérées intéressantes sur le plan technique et pour mieux connaître le contexte Français.

2.2 Synthèse des outils de dimensionnement de la division SMIT

À la demande du chef de la Division (Chantal de La Roche), j'ai effectué un recensement et synthèse des outils développés ou en développement et susceptibles d'être utilisables en dimensionnement et analyse des chaussées. Cette activité a contribué à me renseigner de façon plus large sur les sujets liés à la mécanique des chaussées. Le rapport de cette activité fait l'objet du livrable [1]. Il donne un portrait d'ensemble des outils disponibles et des sujets que j'ai été appelé à traiter.

2.3 Cahier de développement pour qualifier le module CVCR dans la version expert de CESAR-CVCR

Le module CVCR, pour le progiciel d'éléments finis CESAR-LCPC, est un composant en développement depuis plusieurs années pour simuler l'effet d'une charge roulante sur une chaussée constituée de couches pouvant être viscoélastiques (BB) et d'autres pouvant être élastiques linéaire ou non linéaire.

La prise en compte du comportement viscoélastique des enrobés, de même que la modélisation d'une charge « roulante », n'a jamais pu être réalisée au MTQ. La modélisation non linéaire est aussi un défi récurrent pour lequel il y a un manque d'outils. Le module CVCR a jusqu'à maintenant été limité à la version « recherche » réservée à l'équipe de développement interne. J'ai été mis à contribution pour compléter la boucle permettant de le soumettre à une épreuve de qualification pour la prochaine version « expert » qui serait alors disponible à l'externe. J'ai notamment préparé des cas de validation pour comparer l'outil avec des solutions analytiques et avec des mesures terrain. Ceci m'a permis de me familiariser avec les éléments finis, en simulant des chaussées et éprouvettes de laboratoire, en 2D et en 3D.

La préparation des solutions comparatives analytiques m'a permis d'apprendre plusieurs choses sur l'élasticité tridimensionnelle, et de bien maîtriser le modèle non linéaire de Boyce. Son utilisation dans CESAR évite la présence d'efforts de tension irréalistes à la base des matériaux granulaires, contrairement aux modèles linéaires. Une des simulations a mis en évidence un problème numérique pour le cas des chaussées à surface non revêtues. J.M. Piau et D. Bodin ont pu le résoudre sur le plan théorique ainsi que dans la programmation FORTRAN par l'ajout d'un paramètre de cohésion dans le matériau.

Ces travaux ont débouché sur la réalisation du cahier de développement (livrable [2]), qui est nécessaire pour intégrer le module CVCR dans la version Expert de CESAR. Un article a aussi été rédigé pour publication dans une revue internationale de rang A (livrable [3]).

2.4 Modélisation viscoélastique avec cisaillement de surface

Il y a eu un mandat de recherche orienté par la problématique de nouveaux tramways sur roues à Clermont Ferrand (Projet Devin), causant des ornières prématurés dans les enrobés et surtout localisées aux abords des stations.

Ces travaux consistaient à faire des simulations comparatives en élasticité et viscoélasticité, avec les logiciels VISCOROUTE et CVCR, afin d'évaluer sous cet angle les sollicitations dans l'enrobé. Les calculs ont impliqué la prise en compte d'efforts de cisaillement issus du freinage et de l'accélération du véhicule, ce qui n'avait jamais été fait auparavant avec ces outils. J'ai présenté ces résultats à l'INRETS à Paris et plusieurs autres chercheurs impliqués dans le projet ont présentés les leurs. L'ensemble des travaux réalisés ne permet pas de résoudre le problème d'ornièrage de la municipalité. Il s'agissait d'un projet de recherche et il n'y avait apparemment pas d'engagement auprès de la municipalité pour l'émission de recommandations. Les simulations effectuées n'ont d'ailleurs pas dépassé le stade de la réponse réversible sous un unique passage d'une roue de tramway. La formulation d'un enrobé approprié nécessite une compréhension plus globale de la problématique, et il manque le raccordement d'un modèle d'ornièrage des enrobés. Un rapport global a été rédigé à la suite

de cette réunion². Le LCPC a démarré une thèse de doctorat sur le sujet en lien avec l'acquisition d'une presse triaxiale cyclique pour l'étude des déformations irréversibles dans les enrobés. Un tel modèle pourrait aussi à terme faire le lien entre les propriétés du matériau et les essais à l'orniéreur.

Un article est aussi en préparation pour publication à partir des simulations effectuées dans le cadre de ce projet (livrable [4]). Ces travaux ont amené à programmer un utilitaire de post-traitement pour VISCOROUTE (livrable [5]).

2.5 Simulations non linéaires avec CVCR

Cette activité a été réalisée dans le but d'établir des solutions de référence avec le module CVCR pour appuyer le développement et la validation d'un outil non linéaire simplifié. Le module CVCR permet de traiter le comportement non linéaire des matériaux granulaires à l'aide du modèle k-theta et du modèle de Boyce.

Deux problèmes sont apparus lors de la modélisation d'essais de plaque sur chaussée. D'une part, le modèle k-theta s'est avéré inutilisable parce que les calculs tendent toujours à converger vers des états de contraintes et déformations en dilatance (pression négative) à la base de la GNT. Dans ces conditions le module CVCR interrompt les calculs avant de les compléter. D'autre part, le post-traitement des résultats issus du modèle de Boyce mène vers des modules d'Young et coefficients de Poisson sécants défiant les critères d'acceptation généralement reconnus avec la loi de Hooke.

Cette double problématique entrave la mise au point d'un outil non linéaire simplifié basé sur la théorie des couches élastiques. Un autre modèle, celui de Coulibaly, a été incorporé dans une version recherche de CVCR pour faire face à ce problème, mais on trouve encore la même incompatibilité avec les limitations de la loi de Hooke. Une étude théorique a aussi été menée pour vérifier le respect des lois de la thermodynamique lors de l'utilisation du modèle de Boyce. Les travaux liés à cette activité sont décrits dans le livrable [6]. Le développement d'un outil simplifié n'est pas complété à l'heure actuelle.

2.6 Modélisation de l'orniérage des chaussées avec le module ORNI de la version recherche de CESAR-LCPC

Le LCPC s'est engagé dans la mise au point d'une approche rationnelle de prévision des ornières. Il s'agit d'un dossier important car la méthode classique (déformation au sommet du sol support) n'est pas satisfaisante.

La recherche actuelle se fonde sur l'étude en laboratoire des matériaux granulaires dans le plan des invariants de contraintes (p et q). Le LCPC a mis au point une méthode d'essai par palier, permettant de tester plusieurs niveaux de contraintes sur une même éprouvette de GNT en conservant un rapport $\Delta q/\Delta p$ constant. Cette étude est ensuite transposée à la chaussée à l'aide d'un calcul de structure permettant d'intégrer les tassements cumulés en fonction de la profondeur. Le NCHRP américain veut lui aussi introduire l'intégrale des déformées sur toutes les épaisseurs pour la méthode AASHTO.

² Balay, J.M., H. Chollet, D. Cuisinier, F. Hammoum, F. Kuhn « Projet PREDIT DEVIN. Durabilité ET interaction Véhicule Infrastructure » rapport final, Rapport INRETS-LCPC-LMT, Décembre 2007.

Les modèles actuels (Gidel et élastoplastiques) arrivent à bien reproduire les essais de déformation permanente en laboratoire. Très peu de calculs ont été faits cependant avec des données en vraie grandeur. J'ai été amené à faire des simulations additionnelles avec ORNI pour comparer les calculs avec des données Manège. J'ai aussi fait les calculs à l'aide d'une approximation simplifiée en 1-D, basée sur les états de contraintes issus du module CVCR. Ces calculs tendent à confirmer que la méthode simplifiée donne des résultats comparables à la méthode élaborée, et que le comportement sous charge roulante est différent du comportement obtenu avec les essais de laboratoire actuels. Le modèle utilisé manque aussi de robustesse, parce que le calcul ne peut pas se faire sous certaines conditions (teneur en eau ou rapport q/p trop élevé). Les détails sont livrés dans le livrable [7].

Ces travaux se sont concentrés sur les matériaux granulaires. Le LCPC conduit des travaux de recherche pour modéliser l'orniérage des enrobés de façon similaire.

2.7 Cisaillements de surface dans un modèle multicouche élastique

La plupart des méthodes rationnelles de dimensionnement se basent sur la théorie des couches élastiques (TCE). Par exemple, la méthode Française se base sur ALIZÉ et le projet de guide national américain se base sur JULEA. Les logiciels utilisés lors d'auscultations structurales (rétrocalcul de modules) se basent aussi sur les mêmes noyaux de calcul. En somme, la maîtrise de tels modèles est indispensable pour l'élaboration d'outils variés en mécanique des chaussées.

L'élasticité constitue une base à assimiler avant de pouvoir passer à des solutions plus complexes viscoélastiques ou non linéaires. Le LCPC a franchi ce cap depuis longtemps, et j'ai pu bénéficier d'explications et de conseils m'ayant permis de cheminer dans ce domaine. Cela m'a permis à tout le moins de décoder l'essentiel de la solution proposée par Yue (1994) pour un multicouche élastique soumis à une sollicitation de surface quelconque. Le premier prototype n'a pas encore été très validé ni optimisé, mais une première vérification avec chargement vertical ponctuel a fourni les résultats escomptés. Les résultats du logiciel VIEM écrit par Yue ont été retrouvés presque jusqu'aux dernières décimales. La programmation des intégrales permettant d'exprimer une sollicitation distribuée sur une surface de géométrie arbitraire ne serait vraisemblablement plus qu'une question de temps.

La solution comprend les charges avec composantes horizontales ainsi qu'une représentation tridimensionnelle dans le domaine des nombres d'ondes permettant le calcul d'une géométrie de chargement quelconque. Ces deux caractéristiques ne sont actuellement pas disponibles dans le noyau ALIZÉ. À terme, ce modèle pourrait servir au MTQ pour l'amélioration du logiciel CHAUSSÉE et au LCPC pour ajouter les cisaillements de surface dans ALIZÉ. Il serait intéressant de le distribuer sous une forme libre (open source), et de s'en servir à des fins académiques. La première ébauche de ce code de calcul est jointe dans l'Annexe 2.

3.0 Conclusions

Le comportement réversible élastique et viscoélastique des matériaux et structures de chaussées est bien maîtrisé par la division SMIT du LCPC. Plusieurs modèles de calcul intéressants y sont développés. L'année passée m'a permis de bien voir le processus d'élaboration de ce type d'outils. La maîtrise du comportement réversible n'est qu'un pré requis pour le stade suivant, soit la question des dommages irréversibles, qui importe plus au

bout du compte. Il reste beaucoup à faire mais une bonne partie des recherches actuelles de la division SMIT est justement axée sur les problématiques d'orniérage, de fissuration de fatigue et de remontée des fissures. La fissuration par le haut et plusieurs autres aspects sont aussi pris en considération. L'approche LCPC est très axée sur la physique et sur une recherche rigoureuse de compréhension des matériaux, ce qui la rend très intéressante. Les connaissances ont bien évoluées depuis les années 90 et la mission passée a été riche en nouveaux apprentissages.

Il y a émergence d'un axe de recherche important, orienté vers les enrobés tièdes et froids. L'étude des caractéristiques de surface (tribométrie) fait aussi l'objet de développements significatifs. Le réseau scientifique Français couvre un très grand nombre de sujets de recherche.

La vocation du LCPC, plus près des sciences fondamentales apparaît complémentaire à celle de la DLC du MTQ. Cette dernière est plus orientée vers les applications, mais les deux unités sont tout de même bien apparentées. La présente mission d'échange s'est avérée très enrichissante et il y a lieu de souhaiter que cette complémentarité soit perçue réciproquement du côté Français. Pour l'avenir, les sujets potentiels pour des échanges entre le MTQ et le LCPC semblent inépuisables. Ces sujets pourraient inclure notamment :

- La caractérisation du comportement mécanique des enrobés (modules, fatigue, orniérage)
- Les enrobés tièdes
- Les enrobés à module élevé (EME)
- Le logiciel Prédicta (Il serait intéressant de documenter quelques mélanges québécois pour vérifier si l'outil permet de reproduire leur comportement. Cela peut nécessiter de transmettre certains échantillons pour les essais non disponibles au Québec.)
- Les techniques de caractérisation de l'adhérence des enrobés (tribométrie...)
- La modélisation du comportement mécanique des chaussées

Le développement des outils de calcul des structures de chaussées reste un sujet largement inépuisé à la suite de la présente mission. Plusieurs aspects tels que : le développement du code multicouche élastique proposé pour tenir compte de chargements avec efforts horizontaux ; l'élaboration d'un outil non linéaire simplifié que nous ne sommes pas parvenus à compléter ; l'amélioration, la validation et la valorisation des outils existants ; ainsi que leur intégration dans des méthodes de dimensionnement pourraient faire l'objet d'échanges ultérieurement.

ANNEXE 1

NOTES SUR LA MÉTHODE FRANÇAISE DE CONCEPTION ET DIMENSIONNEMENT DES CHAUSSÉES

ANNEXE 1 : NOTES SUR LA MÉTHODE FRANÇAISE DE CONCEPTION ET DIMENSIONNEMENT DES CHAUSSÉES

1 INTRODUCTION

En 1993, la France compte 900 000 km de routes revêtues (incluant 36 530 km d'autoroutes et routes nationales) auxquels s'ajoutent 650 000 km de chemins forestiers ou agricoles non-revêtus.

2 FONDEMENTS

La structure type (Illustration 1) comprends la « plate-forme support de chaussée » constituée de la partie supérieure de sol terrassé (déblai ou remblai, en place ou rapporté) et de la couche de forme, considérée insensible à l'eau, qui le surmonte. Au point de vue du Québec (MTQ), on note que la démarche actuelle d'introduction d'une couche d'infrastructure améliorée, en supplément de la sous-fondation, tends à se rapprocher de cette méthode. Toujours du bas vers le haut, on retrouve ensuite les couches d'assise (comprenant la fondation surmontée de la base) en matériaux élaborés, éventuellement liés, et finalement la couche de surface (pouvant comprendre une couche de liaison surmontée de la couche de roulement).

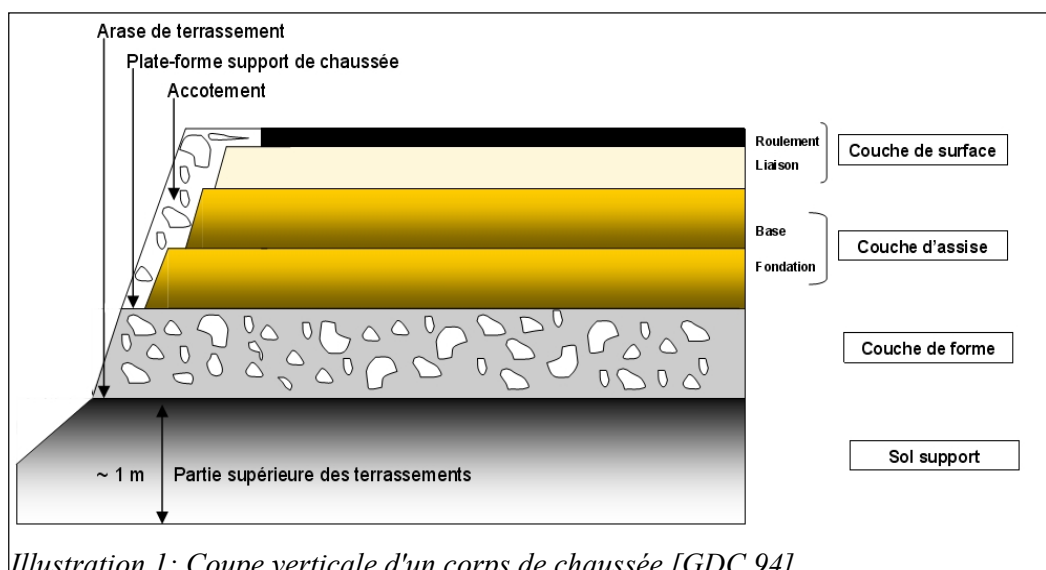


Illustration 1: Coupe verticale d'un corps de chaussée [GDC 94].

Le chapitre I du guide de conception (GDC, 1994) décrit la structure type ainsi que les différentes familles de structures de chaussées (souples, bitumineuses épaisses, mixtes, traitées au liants hydrauliques, structures inverses et diverses variantes en béton de ciment) ainsi que leurs modes de fonctionnement et d'endommagement. La structure souple, principalement utilisée pour les routes secondaires peu empruntées par le trafic lourd, est typiquement constituée d'un revêtement bitumineux inférieur à 15 cm reposant sur une ou plusieurs couches de graves non traitées (entre 20 et 60 cm, compactées par couches de 20 à 30 cm). Les couches d'assise granulaires (0 à 60 cm) sont évidemment plus minces qu'au Québec en raison des hivers moins rudes, mais la comparaison doit aussi tenir compte de la couche de forme, jusqu'à 80 cm, issue des terrassements.

On note que l'approche française s'est orientée vers l'école rationnelle ou mécanisto-analytique dès la sortie de la première version du logiciel Alizé. Le GDC (1994) retiens les travaux de Burmister 1943 (élastique), Ivanov en URSS et MacLeod au Canada (élastoplastique) à titre de précurseurs de

l'approche rationnelle. La première solution élastique tri-couche française a été publiée par Jeuffroy et Bachelez en 1959. Le logiciel Alizé, mis au point par le LCPC en 1964, a été utilisé pour certaines vérifications du Catalogue de dimensionnement de 1971 et repris de façon plus systématique à partir de celui publié en 1977. Ces travaux ont été menés en parallèle avec la standardisation des matériaux, le tout étant motivé par les exigences de la politique des renforcements coordonnés lancée en 1969 à la suite des dommages routiers causés par les hivers exceptionnels de 1956 et 1963.

Pour les chaussées bitumineuses, les calculs se font suivant les hypothèses mécanistes classiques concernant les mécanismes d'orniérage structurel et de fissuration par fatigue. La fissuration thermique et le désenrobage ne font pas l'objet de calculs mais sont pris en considération dans la sélection et le dosage en liants. L'orniérage par fluage est abordé de façon empirique avec l'essai à l'orniéreur, au stade de l'étude de formulation.

Le GDC (1994) remplace la notion de durée de vie par le risque de calcul (ou la probabilité de rupture) sur la période initiale de calcul (durée p en années). Il s'agit du risque d'apparition de désordres impliquant des travaux de renforcement assimilables à une reconstruction, en l'absence de toute intervention d'entretien structurel dans l'intervalle. Cette approche probabiliste est similaire à celle de la méthode AASHTO 1993 utilisée au Québec, sauf qu'elle s'applique sur des courbes de fatigue.

L'approche fonctionne par classes de trafic et par classes de plate forme support. Elle tient compte aussi de l'environnement (climat et drainage), des matériaux et de la qualité de réalisation des travaux. L'effet du drainage intervient par son incidence sur la portance de la plate forme, dans le choix du module affecté au sol support.

3 TRAFIC LOURD

L'essieu de référence est l'essieu isolé à roues jumelées de 130 kN (jumelage standard de 65kN établi en 1945) et correspond à la charge maximale légalement autorisée. Par commodité pour le choix entre certaines classes de produits ou matériaux, il est fait usage de la notion de classe de trafic (Tableau 1). Celle-ci est déterminée à partir du trafic poids lourd journalier moyen (MJA) de la voie la plus chargée, pendant l'année de mise en service.

Tableau 1: Définition des classes de trafic lourd (GDC 1994)

Classe	T5	T4	faible		moyen				fort		TEX		
			T3		T2		T1		T0			TS	
			T3-	T3+	T2-	T2+	T1-	T1+	T0-	T0+		TS-	TS+
MJA	0	25	50	85	150	200	300	500	750	1200	2000	3000	5000

Le Catalogue de 1998 introduit une classification distincte basée sur le nombre de poids lourds cumulés (NPL) durant la période de conception. Cette classification s'applique au réseau routier national (RRN).

Tableau 2: Définition des classes de trafic lourd (GDC 1994)

- Bornes supérieures des classes de trafic cumulé pour les VRS et les VRNS (exprimées en millions de poids lourds)

VRS	TC1 ₃₀	TC2 ₃₀	TC3 ₃₀	TC4 ₃₀	TC5 ₃₀	TC6 ₃₀	TC7 ₃₀	TC8 ₃₀
	0,5	1	3	6	14	38	94	
VRNS	TC1 ₂₀	TC2 ₂₀	TC3 ₂₀	TC4 ₂₀	TC5 ₂₀	TC6 ₂₀	TC7 ₂₀	TC8 ₂₀
	0,2	0,5	1,5	2,5	6,5	17,5	43,5	

4 PLATE-FORME SUPPORT DE LA CHAUSSEE

Les terrassements constituent une étape importante résumée dans le chapitre IV du guide de conception (GDC, 1994) et faisant l'objet d'un guide spécifique (GTR, 1992). Pour l'essentiel, la plate forme support doit répondre à des critères à court terme, pour supporter le trafic de chantier, et à long terme pour favoriser une bonne performance de chaussée en service. Le tableau suivant résume les caractéristiques minimales exigées pour la plate forme support:

Tableau 3: Plate forme de support

Considération	Paramètre	Seuil	
		Chantiers courants	Grands chantiers
Traficabilité (pour exécution des travaux)	Indice portant immédiat (IPI ¹)	≥ 35	≥ 35 ?
Nivellement (pour régularité de l'uni et des épaisseurs)	Déviations p/r ligne de terrassement	± 3 cm	± 2 cm
Déformabilité (pour bien compacter les couches de la chaussée)	Module min et Déflexion max sous 130 kN	≥ 50 MPa < 2 mm	≥ 80 MPa < 1,5 mm
Gel	Résistance au gel lorsque nécessaire		
Long terme	Classe de portance pour justification du dimensionnement		

Contrairement à la pratique québécoise basée sur la classification unifiée, les sols en France font l'objet d'une classification spécifiquement adaptée pour la réalisation des remblais et couches de formes routiers. Cette classification est basée sur les paramètres significatifs pour cet usage, en termes de composition, comportement mécanique et état hydrique.

- Classe A: sols fins (A₁ à A₄)
- Classe B: sols sableux et graveleux avec fines (B₁ à B₆)
- Classe C: sols comportant des fines et des gros éléments (Combinaisons C_iA_j ou C_iB_j)
- Classe D: sols insensibles à l'eau (passant 80µm ≤ 12% et VBS ≤ 0,1)
- Classe R: matériaux rocheux (R₁ à R₆)
- Classe F: sols organiques (F₁) et sous-produits industriels (F₂ à F₉)

L'état hydrique est déterminé en comparant la teneur en eau avec l'optimum proctor ou les limites

¹ L'indice IPI s'apparente à un essai CBR exempté de l'étape d'immersion de l'échantillon, ce qui donne des valeurs plus élevées. Il a été adopté en France parce qu'il est plus rapide à réaliser tout en permettant de caractériser la portance obtenue immédiatement après compactage, afin de prédire la traficabilité en chantier.

d'Atterberg, ou à l'aide de l'indice de portance immédiat (IPI). Il fait l'objet d'un suffixe intégré au système de classification (très sec: ts, sec: s, moyen: m, humide: h ou très humide: th). Les essais au bleu de méthylène sont systématiquement réalisés, en complément de l'indice I_p , pour déterminer l'argilosité des sols fins. Le GTR 1992 décrit en détail le système de classification, ainsi que les conditions d'utilisation et de compactage de chaque matériau.

4.1 Partie supérieure des terrassements (PST ou sol support)

On définit sept cas de PST selon le type de sol et son état hydrique (voir tableau IV.3.1 dans le GDC 1994) et quatre classes de portance en fonction du module mesuré sur l'arase de terrassement (Tableau 4). Les cas de portance inférieure à 20 MPa (AR0) doivent être améliorés par purge, drainage, etc. Le classement de l'arase a des répercussion sur les travaux de stabilisation, de drainage et sur la couche de forme exigés.

La méthode de dimensionnement est calée en retenant les caractéristiques mécaniques correspondant aux conditions hydriques les plus défavorables pour la chaussée en excluant les périodes de gel et dégel. Il n'est ainsi pas tenu compte des variations saisonnières. On retient un module correspondant à celui de la borne inférieure de la classe de portance à long terme de l'arase de la PST. On limite les déformation verticales ε_z en fonction de la relation empirique suivante, non différenciée selon les matériaux, pour limiter l'orniérage à 15 mm:

$$\begin{aligned} \varepsilon_z &= 0,012 NE^{-0,222} \text{ pour les chaussées à moyen et fort trafic (T>T3)} \\ \varepsilon_z &= 0,016 NE^{-0,222} \text{ pour les chaussées à faible trafic (T<T3)}. \end{aligned}$$

4.2 Couche de forme

Cette couche de transition entre le sol et les assises s'ajoute en cas de besoin pour rencontrer les fonctions essentielles de la plate forme. Elle permet en plus de protéger le sol support et d'homogénéiser le support. Elle doit contribuer au drainage ainsi qu'au maintien dans le temps de la portance minimale. Elle peut inclure plusieurs couches de matériaux différents incluant éventuellement un géotextile. Le GTR 1992 préconise une épaisseur (hp) permettant d'assurer presque en tout temps la circulation des engins de construction. La classe de portance de la plate forme (Tableau 4) peut ensuite être déterminée en fonction de la classe de l'arase ainsi que de l'épaisseur et du type (non-traité, sol fin traité, sol grenu traité) de couche de forme envisagé (voir fig. IV1.1 et chapitre IV.5 du GDC 1994). On permet de réduire la couche de forme de 10 à 15 cm lorsqu'on intercale un géotextile au dessus d'une arase de classe AR1 (GDC tableau IV.3). La figure IV.5.2 considère un plafonnement du module de la plate forme même si l'on continue d'ajouter du matériau non lié : maximum à 180 MPa pour un matériau roulé ou non concassé. Les calculs courants assimilent toute la plate forme à un demi-espace homogène auquel est affecté le module minimal de la classe de portance de la plate-forme. Il faut disposer de données mécaniques plus complètes pour les calculs traitants la couche de forme séparément. On vérifie les déformation verticales ε_z de la même façon, et avec la même équation, que pour le sol support.

Les récents travaux de recherche menés au LCPC sur les structures souples indiquent que le critère ε_z n'est valable que pour des épaisseurs de GNT inférieures à 50 cm. Cette observation est en accord avec l'expérience vécue au MTQ.

Tableau 4: Classes de portance (arase et plate-forme support)

Module minimal (MPa)	20	50	120	200
Classe de l'arase (PST)	AR1	AR2*	AR3	AR4
Classe de plate-forme**	(PF1)	PF2	PF3	PF4

*Scetauroute a introduit une classe d'arase intermédiaire ($AR_{12} = 35$ à 50 MPa) pour les chantiers autoroutiers.

**portance établie à partir du couple PST et couche de forme.

En pratique, la classe PF1 est très rarement utilisée et limité aux routes de très faible importance. Les matériaux sont souvent stabilisés, ce qui permet d'obtenir une plate-forme de classe PF3 voire PF4. La stabilisation des sols fait l'objet d'un guide spécifique (GTS 1995). Ces sols sont caractérisés par une résistance en traction directe (R_t) en complément du module d'Young (on suppose $\nu = 0,25$ et on utilise les valeurs moyennes déduites d'un écart type). Les calculs sont basés sur la résistance en traction admissible à la base de la couche traitée, en considérant des interfaces décollés avec glissement.

5 MATÉRIAUX DE CHAUSSEE

5.1 Constituants

Les granulats sont normalisés (norme P18-101) pour assurer une qualité minimale en terme de granularité, propreté, dureté et angularité. La résistance au polissage est introduire pour la couche de roulement, et exclue les gravillons calcaires du réseau des routes nationales. On retrouve une grande variété de liants hydrauliques et pouzzolaniques dont la plupart sont codifiés par des normes. Les liants hydrocarbonés sont définis dans la norme T65-000 qui distingue les émulsions et plusieurs types de bitumes (purs, modifiés, fluidifiés, fluxés, composés). Les bitumes les plus utilisés (GDC 1994) sont de classe 35/50 et 50/70, mais il existe aussi des classes hors normes (10/20, 20/30, 70/100) pour certains contextes particuliers. Les autres constituants typiques font aussi l'objet de normes énumérées dans le chapitre V du GDC 1994: eau d'apport, chaux, activant de prise des laitiers de haut-fourneau, retardateurs de prise et fines d'apport pour enrobés. Les dopes d'adhésivité sont pour leur part évaluées sur la base de leur efficacité à l'aide de l'essai Duriez (amélioration du rapport immersion-compression) ou d'essais d'affinité liant-granulats (tel que à la plaque Vialit).

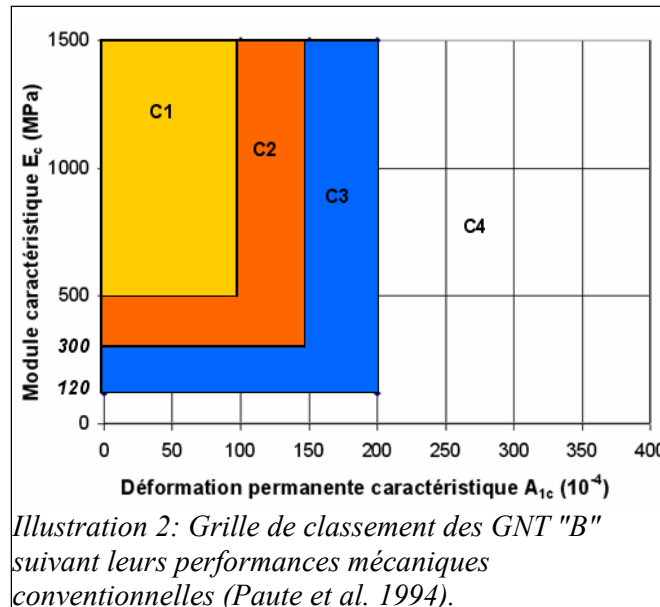
5.2 Graves non traitées (GNT)

(Normes applicables: XPP 18545, NF EN 13242)

Les graves non traitée ont une granulométrie continue avec un diamètre maximal de grains compris entre 14 et 31,5 mm et contenant une faible quantité (4 à 10%) de fines non plastiques. On distingue deux types de GNT, soit la « A » et la « B ». Les GNT « A » obtenues en une seule fraction, sans ajout d'eau, sont limitées aux routes à faible trafic ($MJA < 150$). On rencontre plus souvent les GNT « B » qui par définition doivent être fabriquée en combinant plusieurs fractions granulaires distinctes et en ajustant la teneur en eau près de l'optimum, d'où l'appellation traditionnelle de grave reconstituée et humidifiée (GRH). Les exigences sur la qualité des GNT sont par ailleurs modulées en trois catégories selon la classe de trafic (voir GDC 1994, tableau V.3.3).

L'usage des GNT dans les structures souples (soit en couche de base) est limité au routes à trafic faible et moyen ($MJA < 750$), et on exige une plate-forme de classe PF2 lorsque le MJA excède 300. Elles sont surmontées d'une couche de grave-bitume au delà de 150 poids lourds par jour. Les chaussées souples représentent néanmoins près de 60% du réseau routier français.

La teneur en eau de mise en oeuvre est généralement comprise entre $w_{OPM}-1$ et $w_{OPM}+0,5$. Hors nappe, on mentionne que la teneur en eau des GNT dans les chaussées en service est en général de l'ordre de $w_{OPM}-2$. La performance mécanique des GNT ne fait pas l'objet d'exigence normalisée, mais leur classement peut se faire sur la base d'essais triaxiaux cycliques normalisés NF P 98-235-1, sur la base du module d'Young (E_c) mesuré sous une contrainte moyenne $p = 250$ kPa et un déviateur $q = 500$ kPa et de la déformation axiale permanente (A_{1c}) obtenue pendant la phase de conditionnement de l'éprouvette.



Pour les calculs courants, on se limite à simplifier la non linéarité du comportement par des sous-couches purement élastiques dont le module est choisi en fonction de la rigidité des couches sous-jacentes et de l'importance de la couverture bitumineuse (voir GDC 1994, tableau V.3.2). On vérifie les déformations verticales ε_z de la même façon, et avec la même équation, que pour la plate-forme de support.

5.3 Graves traitées aux liants hydrauliques

Cette catégorie regroupe une grande variété de mélanges codifiés de granulats, de liant hydraulique ou pouzzolanique (ciment, chaux, laitiers, cendres volantes) et d'eau fabriqués en centrale. Le dimensionnement se fait à partir des valeurs de performance mécanique à 360 jours, lesquelles sont réparties en 5 classes (G1 à G5) combinant la résistance en traction directe R_{t360} et le module sécant à 30% de la charge de rupture E_{360} (voir figure V.4.1 du GDC 1994). Le comportement en fatigue est généralement estimé à partir de seuls essais de traction directe par le biais de corrélations avec la résistance en flexion (f_f) et la contrainte de rupture pour un million de cycles (σ_6). Le guide GDC 1994 (chapitre V.4.2.4) liste les valeurs de référence usuelles ainsi que les relations pouvant être utilisées pour utiliser des résultats de laboratoire tout en restant dans le bas des spectres de dispersion. Il est aussi intéressant de noter qu'un tableau est fourni pour extrapoler les performances à un an à partir d'essais en jeune âge (28, 60 ou 90 jours).

Les sables traités aux liants hydrauliques font l'objet de spécifications décrites au chapitre V.4.3 du GDC 1994.

5.4 Matériaux traités aux liants hydrocarbonés à chaud

Cette catégorie inclue tous les bétons bitumineux, enrobés bitumineux ainsi que les graves-bitume et les sable-bitume fabriqués à chaud.

La méthode dimensionnement française tient compte des propriétés mécaniques des différents enrobés bitumineux. Des valeurs standards pour les modules de rigidité et paramètres de résistance à la fatigue sont prescrites pour chaque type de mélange dans le chapitre V5 du GDC 1994. On retrouve entre autres une classe spéciale d'enrobés à module élevés (EME) que les Français utilisent couramment depuis plus d'une dizaine d'année. Ce mélange est souvent utilisé par exemple pour augmenter la capacité structurale d'une voie d'autoroute sans la rehausser dans le cadre d'une intervention de type fraisage et resurfaçage. Ce mélange a un module typique de l'ordre de 14 000 MPa tout en maintenant une bonne résistance à la fissuration et une résistance à la fatigue supérieure aux autres mélanges. Ceci découle de l'usage d'un bitume très dur, dont on enlève les huiles, mais aussi d'une formulation laissant très peu de vides.

6 RÉFÉRENCES

Deloffre, Lydie (2007) « Évaluation de la méthode française de dimensionnement des chaussées. Comparaison avec le comportement de chaussées expérimentales. Étude des chaussées à faible trafic, à assises en grave non traitée » rapport de stage ENTPE, École Nationale des Travaux Publics de l'État (ENTPE), France, 103 pages.

Froment, Thomas (2007) « Bilan du comportement des chaussées du plan routier breton. Comparaison par rapport aux hypothèses de dimensionnement » rapport de stage ENTPE, École Nationale des Travaux Publics de l'État, France, 119 pages.

GDC (1994) « Conception et dimensionnement des structures de chaussées », Guide technique, LCPC-SETRA, Ministère de l'Équipement, des Transports et du Tourisme, France.

GTR (1992) « Réalisation des remblais et des couches de forme (Fascicule I: Principes généraux et Fascicule II: Annexes techniques) », Guide technique, LCPC-SETRA, Ministère de l'Équipement, des Transports et du Tourisme, France, 98 + 102 pages.

GTS 1995 « Traitement des sols à la chaux, aux liants hydrauliques et pouzzolaniques », Guide technique, LCPC-SETRA, Ministère de l'Équipement, des Transports et du Tourisme, France.

Hornych, Pierre et Absamad El Abd (2006) « Development and validation of a method of prediction of structural rutting of unbound pavement layers » Work package 5 Performance-based specifications, SAMARIS: Sustainable and Advances Materials for Road Infrastructure, Competitive and Sustainable Growth Programme. Document number SAM-05-DE27, 94 pages, 5 janvier 2006.

Paute J.L., Marignier J., Vidal B. (1994) « Le triaxial à chargements répétés LPC pour l'étude des graves non traitées », Bulletin de Liaison des Laboratoires des Ponts et Chaussées n°190, mars-avril, pp.12-26.

ANNEXE 2

SYSTÈME MULTICOUCHE ÉLASTIQUE SOUMIS À UNE CHARGE À COMPOSANTES VERTICALES ET HORIZONTALES

ANNEXE 2 : Système multicouche élastique soumis à une charge à composantes verticales et horizontales

Des équations ont été proposées par Yue (1994) pour résoudre un système multicouches élastique soumis à un chargement quelconque appliqué à la surface. Les équations essentielles à retenir pour une programmation logicielle sont transcrites dans ce qui suit. Il n'y a aucune limite sur le nombre de couches et la charge est décrite par son intensité suivant toutes les directions (x, y, z). Les équations sont écrites en supposant que les interfaces entre les couches sont parfaitement collées. Yue (1995) indique qu'il est facile d'introduire une condition d'interface à friction variable, cela n'est pas très explicitement documenté mais les indications disponibles sont ajoutées à la fin. La formulation originale prévoit quatre variantes que l'on peut appliquer dépendamment de la géométrie de l'aire de contact de la charge (ponctuelle, circulaire ou quelconque). Les numéros d'équation indiqués correspondent à la numérotation de l'article original de Yue.

Données du problème

Soit le vecteur de force $F = [F_x \ F_y \ F_z]^T$ appliqué à la surface d'un massif stratifié. On cherche une sollicitation interne S en un point (x, y, z) quelconque, à l'intérieur des champs définis par les vecteurs suivants :

Espace réel $O x y z$

$$u = [u_x \ u_y \ u_z]^T$$

$$T_z = [\sigma_{xz} \ \sigma_{yz} \ \sigma_{zz}]^T$$

$$\Gamma_p = [\varepsilon_{xx} \ \varepsilon_{xy} \ \varepsilon_{yy}]^T$$

Espace de Fourier $O \xi \eta z$

$$w = [w_1 \ w_2 \ w_3]^T$$

$$\tau = [\tau_1 \ \tau_2 \ \tau_3]^T$$

$$\text{et } V = [w_2 \ \tau_2]^T, \quad U = [w_1 \ w_3 \ \tau_3 \ \tau_1]^T$$

On considère le multicouche semi-infini avec n+1 couches élastiques, isotropes, continues, homogènes, parfaitement collées et numérotées par l'indice j :

- Épaisseurs et profondeurs z des interfaces : $h_j = H_j - H_{j-1}$
- Modules de cisaillement et coefficients de Poisson : μ_j et ν_j

Les fonctions de Bessel de première sorte et d'ordre m, se définissent par :

$$J_m = J_m(\rho r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{\pm i(\rho r \sin \psi - m\psi)} d\psi$$

Calculs (multicouche élastique)

On calcule d'abord les paramètres suivants (appendice A de Yue) :

A1-Constantes :

$$q_0 = [0, -1], \quad I_v = q_0^T, \quad P_{q_0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad I_u = P_{q_0}^T$$

A2-Valeurs pour chaque couche j de 1 à n+1 (indice j omis pour alléger):

$$\alpha = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}$$

$$C_v = \begin{pmatrix} 0 & \mu^{-1} \\ \mu & 0 \end{pmatrix}, \quad C_u = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \mu^{-1} \\ 1-2\alpha & 0 & \alpha \mu^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4\mu(1-\alpha) & 0 & 2\alpha-1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
A_p &= \begin{pmatrix} 1 & \mu^{-1} \\ \mu & 1 \end{pmatrix}, & A_q &= 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - A_p \\
Q_p &= \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & 0 & \frac{1+\alpha}{2\mu} \\ -\alpha & 1 & \frac{1+\alpha}{2\mu} & 0 \\ 0 & 2\mu(1-\alpha) & 1 & \alpha \\ 2\mu(1-\alpha) & 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix}, & Q_q &= 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - Q_p \\
R_p &= (1-\alpha) \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{-1}{2\mu} & \frac{1}{2\mu} \\ 1 & -1 & \frac{-1}{2\mu} & \frac{1}{2\mu} \\ 2\mu & -2\mu & -1 & 1 \\ 2\mu & -2\mu & -1 & 1 \end{pmatrix}, & R_q &= (1-\alpha) \begin{pmatrix} -1 & -1 & \frac{1}{2\mu} & \frac{1}{2\mu} \\ 1 & 1 & \frac{-1}{2\mu} & \frac{-1}{2\mu} \\ -2\mu & -2\mu & 1 & 1 \\ 2\mu & 2\mu & -1 & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Note : la modification des conditions d'interface se fait probablement dans ces matrices. Il s'agirait de reproduire la solution analytique de V(z) et U(z) pour le problème aux conditions limites décrit dans la section ci-bas intitulée « Conditions limites pour des interfaces à friction variable ».

A3-Autres valeurs caractéristiques du massif semi-infini :

$$P_{n+1} = \left[1, \frac{1}{\mu_{n+1}} \right], \quad P_{p(n+1)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{-1}{2\mu_{n+1}} & \frac{1}{2\mu_{n+1}} \\ 1-\alpha_{n+1} & 1-\alpha_{n+1} & \frac{1+\alpha_{n+1}}{2\mu_{n+1}} & \frac{1+\alpha_{n+1}}{2\mu_{n+1}} \end{pmatrix}$$

On définit ensuite les fonctionnelles fondamentales suivantes :

Matrice 2x2

Matrice 4x4

$$A_j(\chi) = \frac{1}{2} [A_q + e^{-2\rho\chi} A_p], \quad Q_j(\chi) = \frac{1}{2} [Q_q - \rho\chi R_q + e^{-2\rho\chi} [Q_p - \rho\chi R_p]] \quad (\text{eq. 8})$$

Ces fonctions seront appelées ultérieurement en fonction de la couche j, du paramètre d'intégration ρ et de la mesure verticale $\chi = b-z$ à utiliser.

Ainsi que les assemblages suivants (interfaces collés) :

$$\Psi_v(\rho, z) = e^{-\rho z} \Phi_{vj}(\rho z) \Gamma_{vj}(\rho) = \begin{pmatrix} \Phi_{22}(\rho, z) \\ \Psi_{22}(\rho, z) \end{pmatrix} \quad (\text{éq. 11a})$$

Pour z entre H_{j-1} et H_j , i.e. $j = 1$ à n

$$\Phi_{vj}(\rho z) = A_j(H_j - z), \quad \Gamma_{vj}(\rho) = A_{j+1}(h_{j+1}) A_{j+2}(h_{j+2}) \cdots A_n(h_n) M_v^{-1}(\rho) I_v$$

Pour $z \geq H_n$, i.e. $j = n+1$:

$$\Phi_{vj}(\rho z) = \frac{1}{2} A_{q(n+1)}, \quad \Gamma_{vj}(\rho) = M_v^{-1}(\rho) I_v$$

$$\text{Avec : } M_v = \begin{pmatrix} P_{n+1} \\ q_0 A_{1n} \end{pmatrix}, \quad A_{1n} = A_1(h_1) A_2(h_2) \cdots A_n(h_n) \quad (\text{matrices } 2 \times 2)$$

$$\Psi_U(\rho, z) = e^{-\rho z} \Phi_{uj}(\rho z) \Gamma_{uj}(\rho) = \begin{pmatrix} \Phi_{13} & \Phi_{33} & \Psi_{33} & \Psi_{13} \\ \Phi_{11} & \Phi_{31} & \Psi_{31} & \Psi_{11} \end{pmatrix}^T \quad (\text{éq. 11b})$$

Pour z entre H_{j-1} et H_j , i.e. $j = 1$ à n

$$\Phi_{uj}(\rho z) = \mathcal{Q}_j(H_j - z), \quad \Gamma_{uj}(\rho) = \mathcal{Q}_{j+1}(h_{j+1}) \mathcal{Q}_{j+2}(h_{j+2}) \cdots \mathcal{Q}_n(h_n) M_u^{-1}(\rho) I_u$$

Pour $z \geq H_n$, i.e. $j = n+1$:

$$\Phi_{u(n+1)}(\rho z) = \frac{1}{2} [\mathcal{Q}_{q(n+1)} + \rho(z - H_n) R_{q(n+1)}], \quad \Gamma_{u(n+1)}(\rho) = M_u^{-1}(\rho) I_u$$

$$\text{Avec : } M_u = \begin{pmatrix} P_{p(n+1)} \\ P_{q0} \mathcal{Q}_{1n} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{Q}_{1n} = \mathcal{Q}_1(h_1) \mathcal{Q}_2(h_2) \cdots \mathcal{Q}_n(h_n) \quad (\text{matrices } 4 \times 4)$$

L'équation 11 (a et b) permet donc de calculer 10 valeurs (5 termes Φ_{ij} et 5 termes Ψ_{ij}) pour chaque pas de calcul (ρ) de l'intégrale à résoudre.

Solution pour une charge ponctuelle

$$G_s(x, y, z) = \frac{-1}{2\pi} \int_0^\infty \Psi_s(x, y, z, \rho) \rho^{1-\delta} d\rho \quad (\text{éq. 44})$$

G_s est le tenseur d'influence unitaire proportionnel à la force appliquée. Les sollicitations recherchées (u , T_z , et Γ_p) s'obtiennent en multipliant G_s par le vecteur de force F .

Pour trouver u prendre $G_s = G_u$ avec $\Psi_s = \Psi_u$ et $\delta = 1$. Pour trouver T_z prendre $G_s = G_z$ avec $\Psi_s = \Psi_z$ et $\delta = 0$.

Pour trouver Γ_p prendre $G_s = G_p$ avec $\Psi_s = \Psi_p$ et $\delta = 0$. Les différentes matrices Ψ_s sont les suivantes :

$$\Psi_u = \begin{pmatrix} \Phi_1 J_0 - \frac{x^2 - y^2}{r^2} \Phi_2 J_2 & \frac{-2xy}{r^2} \Phi_2 J_2 & \frac{-x}{r} \Phi_{13} J_1 \\ \frac{-2xy}{r^2} \Phi_2 J_2 & \Phi_1 J_0 + \frac{x^2 - y^2}{r^2} \Phi_2 J_2 & \frac{-y}{r} \Phi_{13} J_1 \\ \frac{x}{r} \Phi_{31} J_1 & \frac{y}{r} \Phi_{31} J_1 & \Phi_{33} J_0 \end{pmatrix}$$

$$\Psi_z = \begin{pmatrix} \psi_1 J_0 - \frac{x^2 - y^2}{r^2} \psi_2 J_2 & \frac{-2xy}{r^2} \psi_2 J_2 & \frac{-x}{r} \psi_{13} J_1 \\ \frac{-2xy}{r^2} \psi_2 J_2 & \psi_1 J_0 + \frac{x^2 - y^2}{r^2} \psi_2 J_2 & \frac{-y}{r} \psi_{13} J_1 \\ \frac{x}{r} \psi_{31} J_1 & \frac{y}{r} \psi_{31} J_1 & \psi_{33} J_0 \end{pmatrix}$$

$$\Psi_p = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{x}{r} (2\Phi_1 + \Phi_2) J_1 & \frac{y}{r} \Phi_2 J_1 & \Phi_{13} J_0 \\ \frac{y}{r} \Phi_1 J_1 & \frac{x}{r} \Phi_1 J_1 & 0 \\ \frac{x}{r} \Phi_2 J_1 & \frac{x}{r} (2\Phi_1 + \Phi_2) J_1 & \psi_{13} J_0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \left(\frac{4x^3}{r^3} - \frac{3x}{r} \right) \Phi_2 J_3 & \left(\frac{3y}{r} - \frac{4y^3}{r^3} \right) \Phi_2 J_3 & \frac{x^2 - y^2}{r^2} \Phi_{13} J_2 \\ \left(\frac{3y}{r} - \frac{4y^3}{r^3} \right) \Phi_2 J_3 & \left(\frac{3x}{r} - \frac{4x^3}{r^3} \right) \Phi_2 J_3 & \frac{2xy}{r^2} \Phi_{13} J_2 \\ \left(\frac{3x}{r} - \frac{4x^3}{r^3} \right) \Phi_2 J_3 & \left(\frac{4y^3}{r^3} - \frac{3y}{r} \right) \Phi_2 J_3 & \frac{y^2 - x^2}{r^2} \Phi_{13} J_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Où } r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \Phi_1 = \frac{1}{2} (\Phi_{11} + \Phi_{22}), \quad \Phi_2 = \frac{1}{2} (\Phi_{11} - \Phi_{22}), \quad \psi_1 = \frac{1}{2} (\psi_{11} + \psi_{22}), \quad \psi_2 = \frac{1}{2} (\psi_{11} - \psi_{22})$$

Solution générale (chargement quelconque)

a) cas généralisé à partir de la solution ponctuelle

$$S(x, y, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} G_s(x-x_1, y-y_1, z) F(x_1, y_1) dx_1 dy_1 \quad (\text{éq. 43})$$

G_s est décrit par la solution de la charge ponctuelle.

b) autre solution générale lorsque l'expression de la charge est disponible dans le domaine de Fourier

$$S(x, y, z) = \frac{-1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{S}(u, v) e^{i(ux+vy)} du dv = \frac{-1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \rho^{-\delta} \Pi_s \Phi_s(\rho, z) \Pi^* \tilde{F} \right\} e^{i(ux+vy)} du dv \quad (\text{éq. 13})$$

$u = \xi$ = longueur d'onde suivant l'axe x

$v = \eta$ = longueur d'onde suivant l'axe y

Pour trouver $S = T_z$, prendre $\delta = 0$, $\Phi_s = \Psi$, et $\Pi_s = \Pi$. Pour trouver $S = u$, prendre $\delta = 1$, $\Phi_s = \Phi$, et

$\Pi_s = \Pi$. Pour trouver $S = \Gamma_p$, prendre $\delta = 0$, $\Phi_s = \Phi$, et $\Pi_s = \Pi_p$.

Où :

$$\Phi = \Phi(\rho, z) = \begin{pmatrix} \Phi_{11} & 0 & \Phi_{13} \\ 0 & \Phi_{22} & 0 \\ \Phi_{31} & 0 & \Phi_{33} \end{pmatrix}, \quad \Psi = \Psi(\rho, z) = \begin{pmatrix} \Psi_{11} & 0 & \Psi_{13} \\ 0 & \Psi_{22} & 0 \\ \Psi_{31} & 0 & \Psi_{33} \end{pmatrix} \quad (\text{éq. 14})$$

Tous les termes à mettre dans ces deux matrices sont connus via l'équation 11.

\tilde{F} : Transformée de Fourier de la force $F(x, y) = [F_x \quad F_y \quad F_z]^T$

$$\text{C'est-à-dire : } \tilde{F}(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(x, y) e^{-i(ux+vy)} dx dy$$

Exemple pour une charge rectangulaire unitaire et uniforme de taille $2a \times 2b$:

$$\tilde{F}(u, v) = \int_{-b-a}^b \int_{-b}^a e^{-i(ux+vy)} dx dy = \frac{2 \sin(au)}{u} \int_{-b}^b e^{-ivy} dy = \frac{4}{uv} \sin(au) \sin(bv)$$

Exemple pour une charge ponctuelle unitaire :

$$\tilde{F}(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x, y) e^{-i(ux+vy)} dx dy = 1 \quad \text{où } \delta(x, y) = \text{fonction de Dirac}$$

On peut intégrer ainsi n'importe quelle fonction de chargement, et même l'intégrer numériquement si elle est trop compliquée pour un développement analytique.

$$\Pi = \begin{pmatrix} i \sin \varphi & i \cos \varphi & 0 \\ i \cos \varphi & -i \sin \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Pi^* = \begin{pmatrix} -i \sin \varphi & -i \cos \varphi & 0 \\ -i \cos \varphi & i \sin \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{i.e. conjuguée complexe})$$

$$\Pi_p = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 - \cos 2\varphi & \sin 2\varphi & 0 \\ \sin 2\varphi & \cos 2\varphi & 0 \\ 1 + \cos 2\varphi & -\sin 2\varphi & 0 \end{pmatrix}$$

$u = \rho \sin \varphi$, $v = \rho \cos \varphi$ Ce qui permet de déduire φ et d'exprimer $\tilde{S}(\rho) = \tilde{S}(u, v)$:

$$\Rightarrow \rho = \frac{u}{\sin \varphi} = \frac{v}{\cos \varphi} \Rightarrow \frac{u}{v} = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \tan \varphi \Rightarrow \varphi = \arctan\left(\frac{u}{v}\right)$$

Solution axisymétrique pour une charge circulaire

Cette solution découle de l'éq. 13 après développement en série de Fourier et transformation intégrale de Hankel:

$$S(r, \theta, z) = - \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_0^{\infty} \rho^{1-\delta} \Pi_{sm}(\rho r) \Phi_s(\rho, z) \tilde{F}_m(\rho) d\rho e^{im\theta} \quad (\text{éq. 45})$$

Lien entre coordonnées cartésiennes et cylindriques : $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$

Description de la charge axisymétrique

$\tilde{F}_m(\rho)$ est relié à la force appliquée $F = [F_r \quad F_\theta \quad F_z]^T$ conformément à l'équation suivante :

$$\tilde{F}_m(\rho) = \int_0^{\infty} \Pi_m^*(\rho r) F_m(r) r dr, \quad F_m(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(r, \theta) e^{-im\theta} d\theta, \quad F(r, \theta) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} F_m(r) e^{im\theta}$$

Ces trois expressions reviennent à dire :

$$\tilde{F}_m(\rho) = \int_0^{\infty} \Pi_m^*(\rho r) \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\sum_{m=-\infty}^{+\infty} F_m(r) e^{im\theta} \right] e^{-im\theta} d\theta \right] r dr$$

Où Π_m^* est la conjuguée complexe de Π_m

$$\Pi_m = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} [J_{m-1} - J_{m+1}] & \frac{i}{2} [J_{m-1} + J_{m+1}] & 0 \\ \frac{i}{2} [J_{m-1} + J_{m+1}] & \frac{-1}{2} [J_{m-1} - J_{m+1}] & 0 \\ 0 & 0 & J_m \end{pmatrix} \quad \Pi_m^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} [J_{m-1} - J_{m+1}] & \frac{-i}{2} [J_{m-1} + J_{m+1}] & 0 \\ \frac{-i}{2} [J_{m-1} + J_{m+1}] & \frac{-1}{2} [J_{m-1} - J_{m+1}] & 0 \\ 0 & 0 & J_m \end{pmatrix}$$

Conditions limites pour des interfaces à friction variable

Soit une interface représentée par une couche très mince, d'épaisseur t (Yue, 1995). Une contrainte de cisaillement (τ) appliquée sur l'interface induit une déformation de cisaillement (γ) suivant la relation suivante : $\tau = G\gamma$ où G est le module de cisaillement du « matériau d'interface ». Pour un faible déplacement de cette fine couche, la déformation de cisaillement peut être définie par $\gamma = \Delta u/t$ où Δu est le déplacement relatif entre les deux côtés de l'interface. En conclusion, on obtient $\tau = G/t \Delta u = K \Delta u$ où K est la résistance en friction du déplacement horizontal de l'interface pouvant être déterminé à l'aide d'essais de laboratoire. Par exemple, des valeurs K de l'ordre de 5 à 10 N/mm³ ont déjà été mesurées à l'interface d'un enrobé bitumineux soumis à un essai de cisaillement direct à 25°C. La valeur $K = 0$ correspond à des interfaces glissantes tandis qu'une valeur tendant vers l'infini correspond à des interfaces parfaitement collées.

Références

- Yue, Z. Q. (1994) "On elastostatics of a multilayered solid subjected to a general surface traction." Submitted to The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, 26p, 1994.
- Yue, Z.Q. (1995) "Influence of Interface Conditions on Backcalculated Layer Moduli of Pavements." Annual Conference of Canadian Society of Civil Engineers, Ottawa, 1995.

Code Source (language Python)

```
# -*- coding: iso-8859-15 -*-
from __future__ import division
from __future__ import nested_scopes
#from sympy import *
import numpy as num
from numpy import pi
from scipy.integrate import quad, dblquad, inf, simps
from scipy.special import jv, j0, j1, jn_zeros #Bessel fcns et roots
from numpy import linspace
#####
#
#           MODÈLE ÉLASTIQUE MULTICOUCHES DE Z.Q.YUE (1994)
#
#           Programmation: Denis St-Laurent, 2008, France
#           Mises à jour :
#
#           Programme d'échange franco-qubécois
#
#####
#Tableau des zéros des fonctions de Bessel
nbz=75
zj0=jn_zeros(0,nbz)
zj1=jn_zeros(1,nbz)
zj2=jn_zeros(2,nbz)
zj3=jn_zeros(3,nbz)

# LIBRAIRIE DE FONCTIONS GÉNÉRALES
# =====
# prod(): jumeau de la builtin fcn sum() sauf qu'on multiplie une série de matrices.
#           (start est une valeur (pas un indice) de départ)
def produit(seq, start=1):
    def mult(x,y): return num.dot(x,y)
    return reduce(mult, seq, start)

# MODÈLE ÉLASTIQUE MULTICOUCHES DE YUE
# =====
# Données programmées en dur:
h=['', 100., 200., inf] #1er item bidon parce que je veux n en base 1
E=['', 4500., 300., 60.]
v=['', 0.30, 0.35, 0.40]
F=[0, 0, 1000000] #[Fr, Ft, Fz] ou [Fx, Fy, Fz]
EvalXYZ=[(500, 0, 150),]

#Pré-traitement
n=len(h)-2
G=['']+ [E[j]/2/(1+v[j]) for j in range(1,n+2)] #mu
H=[sum(h[1:j]) for j in range(1,n+2)] #H des interfaces avec H[0]=0
X, Y, Z = EvalXYZ[0]
jj=len([i for i in H if i <= Z]) #EvalLayer
jjj=len(H)-len([i for i in H if i > Z]) #façon moins belle de calculer jj
F=num.array(F).T

#A1-Constantes
q0=num.array([0,-1]) ; Pq0=num.array([[0,0,1,0],[0,0,0,-1]]); Iv=q0.T; Iu=Pq0.T

#A2-Caractéristiques des couches (avec bidons pour gérer en base 1)
a=['']; Cv=['']; Cu=['']; Ap=['']; Aq=['']; Qp=['']; Qq=['']; Rp=['']; Rq=['']
for j in range(1,n+2):
```

```

a.append( (1-2*v[j])/2/(1-v[j]) ) #alpha

Cv.append(num.array( [[0, 1/G[j]], [G[j], 0]] ))
Ap.append(num.array( [[1, 1/G[j]], [G[j], 1]] ))

Cu.append(num.array([[ 0, -1, 0, 1/G[j] ],
[ 1-2*a[j], 0, a[j]/G[j], 0 ],
[ 0, 0, 0, 1 ],
[ 4*G[j]*(1-a[j]), 0, 2*a[j]-1, 0 ]]))

Aq.append(2*num.eye(2)-Ap[j])

deuG=2*G[j]
x=(1+a[j])/deuG
y=deuG*(1-a[j])

Qp.append(num.array([[ 1, -a[j], 0, x ],
[-a[j], 1, x, 0 ],
[ 0, y, 1, a[j] ],
[ y, 0, a[j], 1 ]]))

Qq.append(2*num.eye(4)-Qp[j])

Rp.append((1-a[j])*num.array([[ 1, -1, -1/deuG, 1/deuG ],
[ 1, -1, -1/deuG, 1/deuG ],
[ deuG, -deuG, -1, 1 ],
[ deuG, -deuG, -1, 1 ]]))

Rq.append((1-a[j])*num.array([[ -1, -1, 1/deuG, 1/deuG ],
[ 1, 1, -1/deuG, -1/deuG ],
[ -deuG, -deuG, 1, 1 ],
[ deuG, deuG, -1, -1 ]]))

#A3-Caractéristiques pour la couche n+1 (half-space)
deuG=2*G[n+1]
pn1 = num.array([1, 1/G[n+1]]) #Matrix(1,2,[1, 1/G[n+1]])
Ppn1= num.array([[ 1, -1, -1/deuG, 1/deuG ],
[ 1-a[n+1], 1-a[n+1], (1+a[n+1])/deuG, (1+a[n+1])/deuG ]])

#Définition des fonctionnelles "fondamentales" (eq 8)
def Aj(j, xeta, ro): return 0.5*(Aq[j]+num.exp(-2*xeta*ro)*Ap[j])
def Qj(j, xeta, ro): return 0.5*(Qq[j]-xeta*ro*Rq[j]+num.exp(-2*xeta*ro)*(Qp[j]-
xeta*ro*Rp[j]))

#Assemblage équation 11a (phipsi22)
def Phi_vj(j, ro, z):
    if j==n+1:
        return 1/2*Aq[n+1]
    else:
        return Aj(j,H[j]-z,ro)

def Gamma_vj(j, ro):
    #Aln=product(Aj(j,h[j],ro),(j,1,n))
    Aln=produit([Aj(i,h[i],ro) for i in range(1,n+1)])
    Mv=num.eye(2) ; Mv[0,:]=pn1 ; Mv[1,:]=num.dot(q0,Aln)
    MvIv=num.dot(num.linalg.inv(Mv),Iv)
    if j==n+1:
        return MvIv
    else:
        return num.dot(produit([Aj(i,h[i],ro) for i in range(j+1,n+1)]), MvIv)

def PsiV(j, ro, z):

```

```

return num.exp(-ro*z)*num.dot(Phi_vj(j,ro,z),Gamma_vj(j,ro))

#Assemblage équation 11b (phipsis)
def Phi_uj(j, ro, z):
    if j==n+1:
        return 1/2*(Qq[n+1]+ro*(z-H[n])*Rq[n+1])
    else:
        return Qj(j,H[j]-z,ro)

def Gamma_uj(j, ro):
    Qln=produit([Qj(i,h[i],ro) for i in range(1,n+1)])
    Mu=num.eye(4) ; Mu=num.vstack((Ppn1,num.dot(Pq0,Qln)))
    MuIu=num.dot(num.linalg.inv(Mu),Iu)
    if j==n+1:
        return MuIu
    else:
        return num.dot(produit([Qj(i,h[i],ro) for i in range(j+1,n+1)]),MuIu)

def PsiU(j, ro, z):
    return num.exp(-ro*z)*num.dot(Phi_uj(j,ro,z),Gamma_uj(j,ro))

#Assemblage de la solution pour une charge ponctuelle (équation 44)
#=====
#Optimisation possible pour les intégrales i1 à i5:
# Faire une boucle d'intégration commune pour calculer les matrices une seule
# fois par point d'intégration (Éventuellement utiliser la méthode de simpson)
# Introduire un critère d'arrêt sur le nombre d'arcs de Bessel à faire.
def Gz(x,y,z,j,d=0.0):
    """équation 44 pour les contraintes verticales Tz =[sxz, syz, szz] sous une force
    ponctuelle

    Cette fonction résoud les intégrales pour Gs=Gz de
    telle sorte qu'il ne reste qu'à multiplier par le vecteur Force F
    """
    r=(x**2+y**2)**0.5

    def i1(ro):
        psiv=PsiV(j,ro,z) #eq 11a
        psiu=PsiU(j,ro,z) #eq 11b
        psil=(psiu[3][1] + psiv[1])/2 # (psi11+psi22)/2
        return psil*j0(ro*r) * ro**(1-d) # psil*j0
    I1= quad(i1, 0, zj0[0])[0] + sum([quad(i1, zj0[k], zj0[k+1])[0] for k in
    range(len(zj0)-1)])

    def i2(ro):
        psiv=PsiV(j,ro,z)
        psiu=PsiU(j,ro,z)
        psi2=(psiu[3][1] - psiv[1])/2 # (psi11-psi22)/2
        return psi2*jv(2,ro*r) * ro**(1-d) # psi2*j2
    I2= quad(i2, 0, zj2[0])[0] + sum([quad(i2, zj2[k], zj2[k+1])[0] for k in
    range(len(zj2)-1)])

    def i3(ro):
        psiu=PsiU(j,ro,z)
        return psiu[3][0]*j1(ro*r) * ro**(1-d) # psi13*j1
    I3= quad(i3, 0, zj1[0])[0] + sum([quad(i3, zj1[k], zj1[k+1])[0] for k in
    range(len(zj1)-1)])

    def i4(ro):
        psiu=PsiU(j,ro,z)
        return psiu[2][1]*j1(ro*r) * ro**(1-d) # psi31*j1
    I4= quad(i4, 0, zj1[0])[0] + sum([quad(i4, zj1[k], zj1[k+1])[0] for k in
    range(len(zj1)-1)])

```

```

def i5(ro):
    psiu=PsiU(j,ro,z)
    return psiu[2][0]*j0(ro*r) * ro**(1-d) # psi33*j0
    I5= quad(i5, 0, zj0[0])[0] + sum([quad(i5, zj0[k], zj0[k+1])[0] for k in
range(len(zj0)-1)])

    x2y2r2=(x**2-y**2)/r**2
    m2xyr2=-2*x*y/r**2

    return -1/2/pi * num.array([[ I1 - x2y2r2*I2,    m2xyr2 * I2,    -x/r * I3 ],
                                [  m2xyr2 * I2,    I1 + x2y2r2*I2,    -y/r * I3 ],
                                [   x/r * I4,        y/r * I4,        I5    ]])

```

```

def Gp(x,y,z,j,d=0.0):
    ""Équation 44 pour les déformations horizontales Gammap =[exx, exy, eyy] sous une
force ponctuelle

```

```

    Cette fonction résoud les intégrales pour Gs=Gp de
telle sorte qu'il ne reste qu'à multiplier par le vecteur Force F
    ""

```

```

    r=(x**2+y**2)**0.5

```

```

def i1(ro):
    psiv=PsiV(j,ro,z) #eq 11a
    psiu=PsiU(j,ro,z) #eq 11b
    phil=(psiu[0][1] + psiv[0])/2 # (phi11+phi22)/2
    phi2=(psiu[0][1] - psiv[0])/2 # (phi11-phi22)/2
    return (2*phil+phi2)*j1(ro*r) * ro**(1-d) #(2phi1+phi2)J1
    I1= quad(i1, 0, zj0[0])[0] + sum([quad(i1, zj0[k], zj0[k+1])[0] for k in
range(len(zj0)-1)])

```

```

def i2(ro):
    psiv=PsiV(j,ro,z)
    psiu=PsiU(j,ro,z)
    phi2=(psiu[0][1] - psiv[0])/2
    return phi2*j1(ro*r) * ro**(1-d) # phi2*J1
    I2= quad(i2, 0, zj1[0])[0] + sum([quad(i2, zj1[k], zj1[k+1])[0] for k in
range(len(zj1)-1)])

```

```

def i3(ro):
    psiv=PsiV(j,ro,z)
    psiu=PsiU(j,ro,z)
    return psiu[0][0]*j0(ro*r) * ro**(1-d) # phi13*J0
    I3= quad(i3, 0, zj0[0])[0] + sum([quad(i3, zj0[k], zj0[k+1])[0] for k in
range(len(zj0)-1)])

```

```

def i4(ro):
    psiv=PsiV(j,ro,z)
    psiu=PsiU(j,ro,z)
    phil=(psiu[0][1] + psiv[0])/2
    return phil*j1(ro*r) * ro**(1-d) # phil*J1
    I4= quad(i4, 0, zj1[0])[0] + sum([quad(i4, zj1[k], zj1[k+1])[0] for k in
range(len(zj1)-1)])

```

```

def i5(ro):
    psiv=PsiV(j,ro,z)
    psiu=PsiU(j,ro,z)
    phi2=(psiu[0][1] - psiv[0])/2
    return phi2*jv(3,ro*r) * ro**(1-d) # phi2*J3
    I5= quad(i5, 0, zj3[0])[0] + sum([quad(i5, zj3[k], zj3[k+1])[0] for k in
range(len(zj3)-1)])

```

```

def i6(ro):
    psiv=PsiV(j,ro,z)
    psiu=PsiU(j,ro,z)
    phi2=(psiu[0][1] - psiv[0])/2
    return psiu[0][0]*jv(2,ro*r) * ro**(1-d) # phi13*J2
I6= quad(i6, 0, zj2[0])[0] + sum([quad(i6, zj2[k], zj2[k+1])[0] for k in
range(len(zj2)-1)])

mat1 = num.array([[ x/r*I1,  y/r * I2,  I3 ],
                  [ y/r*I4,  x/r*I4,  0 ],
                  [ x/r*I2,  y/r * I1,  I3 ]])

Qx3=(4*x**3/r**3 - 3*x/r)
Qy3=(4*y**3/r**3 - 3*y/r)
x2y2=(x**2-y**2)/r**2
deuxy=2*x*y/r**2

mat2 = num.array([[ Qx3 * I5,  -Qy3 * I5,  x2y2 * I6 ],
                  [ -Qy3 * I5,  -Qx3 * I5,  deuxy * I6 ],
                  [ -Qx3 * I5,  Qy3 * I5,  -x2y2 * I6 ]])

return -1/2/pi * (-1/2 * mat1 + 1/2 * mat2)

def Gu(x,y,z,j,d=1.0):
    """"équation 44 pour les déplacements u =[ux, uy, uz] sous une force ponctuelle

    Cette fonction résoud les intégrales pour Gs=Gu de
    telle sorte qu'il ne reste qu'à multiplier par le vecteur Force F
    """"
    r=(x**2+y**2)**0.5

    def i1(ro):
        psiv=PsiV(j,ro,z) #eq 11a
        psiu=PsiU(j,ro,z) #eq 11b
        phil=(psiu[0][1] + psiv[0])/2 # (phi11+phi22)/2
        return phil*j0(ro*r) * ro**(1-d) # phil*j0
    I1= quad(i1, 0, zj0[0])[0] + sum([quad(i1, zj0[k], zj0[k+1])[0] for k in
range(len(zj0)-1)])

    def i2(ro):
        psiv=PsiV(j,ro,z)
        psiu=PsiU(j,ro,z)
        phi2=(psiu[0][1] - psiv[0])/2 # (phi11-phi22)/2
        return phi2*jv(2,ro*r) * ro**(1-d) # phi2*j2
    I2= quad(i2, 0, zj2[0])[0] + sum([quad(i2, zj2[k], zj2[k+1])[0] for k in
range(len(zj2)-1)])

    def i3(ro):
        psiu=PsiU(j,ro,z)
        return psiu[0][0]*j1(ro*r) * ro**(1-d) # phi13*j1
    I3= quad(i3, 0, zj1[0])[0] + sum([quad(i3, zj1[k], zj1[k+1])[0] for k in
range(len(zj1)-1)])

    def i4(ro):
        psiu=PsiU(j,ro,z)
        return psiu[1][1]*j1(ro*r) * ro**(1-d) # phi31*j1
    I4= quad(i4, 0, zj1[0])[0] + sum([quad(i4, zj1[k], zj1[k+1])[0] for k in
range(len(zj1)-1)])

```

```

def i5(ro):
    psiu=PsiU(j,ro,z)
    return psiu[1][0]*j0(ro*r) * ro**(1-d) # phi33*j0
I5= quad(i5, 0, zj0[0])[0] + sum([quad(i5, zj0[k], zj0[k+1])[0] for k in
range(len(zj0)-1)])

x2y2r2=(x**2-y**2)/r**2
m2xyr2=-2*x*y/r**2

return -1/2/pi * num.array([[ I1 - x2y2r2*I2,    m2xyr2 * I2,    -x/r * I3 ],
                             [  m2xyr2 * I2,    I1 + x2y2r2*I2,    -y/r * I3 ],
                             [   x/r * I4,        y/r * I4,        I5    ]])

#Mon premier Jeu de test
#nota: On peut aussi permuter X et Y pour élargir la validation
print '\nStructure multicouches:\n','='*30
print 'Épaisseurs      ', h
print 'Modules          ', E
print 'coef. Poisson    ', v
print 'Force ponctuelle F = [Fx, Fy, Fz] = ', F
print "Point d'évaluation x, y, z = ", EvalXYZ
gz=Gz(X,Y,Z,jj)
print '\nSolution charge ponctuelle:\n','='*30
print '      Tz =[sxz, syz, szz] =', num.dot(gz, F)
print '      Logiciel VIEM = [-0.63050      0.      -0.22971 ]'

gp=Gp(X,Y,Z,jj)
print 'Gammap =[exx, exy, eyy] =', num.dot(gp, F)
print '      Logiciel VIEM [-0.00087161  0.      0.0013851]'

gu=Gu(X,Y,Z,jj)
print '      U =[ux, uy, uz] =', num.dot(gu, F)
print '      Logiciel VIEM = [ 0.69256      0.      8.6403 ]'

```

Résultats de l'exécution

```

>>>
Structure multicouches:
=====
Épaisseurs      ['', 100.0, 200.0, 1.#INF]
Modules          ['', 4500.0, 300.0, 60.0]
coef. Poisson   ['', 0.29999999999999999, 0.34999999999999998,
0.400000000000000002]
Force ponctuelle F = [Fx, Fy, Fz] = [      0      0 1000000]
Point d'évaluation x, y, z = [(500, 0, 150)]

Solution charge ponctuelle:
=====
      Tz =[sxz, syz, szz] = [-0.63050306  0.      -0.22970876]
      Logiciel VIEM = [-0.63050      0.      -0.22971 ]
Gammap =[exx, exy, eyy] = [-0.00087164  0.      0.00138511]
      Logiciel VIEM [-0.00087161  0.      0.0013851]
      U =[ux, uy, uz] = [ 0.6925579  0.      8.64031795]
      Logiciel VIEM = [ 0.69256      0.      8.6403 ]

>>>
On retrouve les résultats du logiciel VIEM, programmé en Fortran par Yue en
1994.

```